MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

28. BAND 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 5. JULI 1928)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:
K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

28. Band. **Inhalt:** 4. Heft.

Seite

Krull, W., Zur Theorie der zweiseitigen Ideale in nichtkommutativen Bereichen 481

Schlesinger, L., Über die hypergeometrischen Differentialsysteme 504

Picone, M, Sulle autosoluzioni e sulle formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte 519

Furch, R., Über den Schnitt zweier Sphären in R_3 556

Doetsch, G., Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. V. Mitteilung. Explizite Lösung des Bolometerproblems 567

Faber, K., Eine Klasse von Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z, x_1, \ldots, x_n$ 579

Mazur, St., Über lineare Limitierungsverfahren 599

Hardy, G. H., und J. E. Littlewood, A convergence criterion for Fourier series 612

Lichtenstein, L., Über eine Eigenschaft der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen 635

Zur Theorie der zweiseitigen Ideale in nichtkommutativen Bereichen.

Von

Wolfgang Krull in Freiburg i. Br.

Verzeichnis einiger häufig zitierter Arbeiten.

1. Dedekind, XI. Supplement zu Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, IV. Aufl. (1894); zitiert mit „D. I".
2. Dedekind, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Math. Annalen **53** (1900), S. 371—403; zitiert mit „D. II".
3. E. Dickson, Algebras and their arithmetics, Chicago 1923; zitiert mit „Di.".
4. H. Grell, Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, Math. Annalen **97** (1923), S. 490—523; zitiert mit „G.".
5. W. Krull, Ein neuer Beweis für die Hauptsätze der allgemeinen Idealtheorie, Math. Annalen **90** (1923), S. 55—64; zitiert mit „K. I".
6. W. Krull, Axiomatische Begründung der allgemeinen Idealtheorie, Sitz.-Ber. d. physikalisch-medizinischen Sozietät Erlangen **56** (1924), S. 47—63; zitiert mit „K. II".
7. E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen **83** (1921), S. 23—66; zitiert mit „N.".
8. E. Noether und W. Schmeidler, Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken, Math. Zeitschr. **8** (1920), S. 1—35; zitiert mit „N.-S."
9. J. H. Maclagan Wedderburn, Hypercomplex numbers[1]), Proceedings of the London Mathematical Society (2) **6** (1908), S. 77—118, zitiert mit „W.".

Im folgenden sollen die Grundlagen der Theorie der zweiseitigen Ideale in nichtkommutativen Bereichen mit Endlichkeitsbedingung ent-

[1]) Die Wedderburnsche Arbeit dient uns ebenso wie das unter 3. angeführte Dicksonsche Lehrbuch beim Literaturnachweis über hyperkomplexe Systeme. Außerdem hängt sie mit unsrer Note' dadurch enger zusammen, daß sie in der arithmetischen Form der Darstellung mit D. I und D. II große Ähnlichkeit besitzt.

Zusatz bei der Korrektur. Man vgl. auch die Abhandlung von E. Artin: *Zur Theorie der hyperkomplexen Systeme* (Abhandlungen des Hamburger Math. Seminars **5**, S. 251—260), die mir erst nach Einreichung meiner Arbeit zu Gesicht gekommen ist.

wickelt werden. (Die Endlichkeitsbedingung ist etwas schwächer als der Noethersche „Teilerkettensatz“.) Als Anwendungsgebiet kommen vor allem die endlichen Systeme hyperkomplexer Größen, insbesondere die „nilpotenten Algebren“, und die in N.-S. behandelten Ringbereiche, deren Elemente sich als Polynome in endlich viel Variablen mit nichtkommutativer Multiplikation auffassen lassen, in Betracht. Hauptziel unsrer Untersuchung ist die Übertragung der Begriffe des „zugehörigen Primideals“ und des „isolierten Komponentenideals“ vom kommutativen auf den nichtkommutativen Fall.

Im Kommutativen kann man nach dem Vorbild von N. von der dort stets vorhandenen kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachendarstellung eines Ideals durch Primärkomponenten ausgehen und mit ihrer Hilfe zugehörige Primideale und isolierte Komponentenideale einführen. Im Nichtkommutativen ist dieser Weg ungangbar, weil hier (wie Beispiele aus § 8 zeigen) die Darstellung durch Primärideale nicht immer zu existieren braucht. Wir werden uns daher zweckmäßig nach dem Muster richten, das ich fürs Kommutative in K. I § 4 angedeutet, in K. II ausgeführt habe, d. h. wir werden an die Spitze unsrer Untersuchungen eine auf den Quotientenbegriff gegründete Definition des zugehörigen Primideals und des isolierten Komponentenideals stellen und aus ihr alle in Betracht kommenden Sätze ableiten.

Es zeigt sich in der Tat, daß auf diesem Wege ein Weiterkommen möglich ist. Erhalten bleiben im Nichtkommutativen im wesentlichen die Sätze über die Existenz endlich vieler zugehöriger Primideale und isolierter Komponentenideale, sowie die Sätze über kleinste gemeinschaftliche Vielfachendarstellungen durch isolierte Komponentenideale. Der Zusammenhang zwischen zugehörigen Primidealen und isolierten Komponentenidealen dagegen gestaltet sich nur unter besondern Voraussetzungen so durchsichtig wie im Kommutativen, nämlich wenn wir uns auf „halbkommutative“ Bereiche beschränken, bei denen wenigstens das Produkt zweier *Prim*ideale stets von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig ist.

Über die Form der Darstellung in der vorliegenden Note ist folgendes zu bemerken: Wir legen nicht etwa einen nichtkommutativen Ring zugrunde, aus dessen Elementen die in Betracht kommenden Ideale gebildet werden; wir gehen vielmehr von einem „Idealbereich“ aus, dessen Individuen die Ideale selbst darstellen, die für uns — unabhängig von ihrer sonstigen Eigenart — allein durch die für sie gültigen Verknüpfungsregeln (Teilbarkeitsverhältnisse, Multiplikation) charakterisiert sind. Das Vorbild für eine derartige Behandlung der Idealtheorie findet sich bei D. II. Doch weist das Axiomensystem der vorliegenden Note (und ebenso das von K. II) von dem Dedekindschen beträchtliche Abweichungen auf; ich

habe mich im gewissen Sinne mehr nach der Zermeloschen Axiomatik der Mengenlehre gerichtet als nach D. II[2]).

Die bisher skizzierten Untersuchungen bilden den Inhalt von § 1 bis § 5. In § 6 zeige ich, wie man in allgemeinen Idealbereichen, ohne irgendwie auf Elemente zurückzugehen, den „Restklassenbereich" nach einem beliebigen Ideal $\mathfrak{m}$ einführen kann. (Man hat im wesentlichen jedes Ideal durch seinen größten gemeinsamen Teiler mit $\mathfrak{m}$ zu ersetzen.) Die Brauchbarkeit des so definierten Restklassenbereichs zeigt sich gelegentlich in § 7, wo einige Sätze und Formeln über teilerfremde Ideale abgeleitet werden.

In § 8 werden diejenigen Idealbereiche $\mathfrak{R}^*$ behandelt, in denen zwei verschiedene Primideale stets teilerfremd sind. Es wird ein Kriterium für die Vertauschbarkeit zweier teilerfremder Ideale in $\mathfrak{R}^*$ abgeleitet, und daraus weiter das wichtige Ergebnis gewonnen, daß in $\mathfrak{R}^*$ dann und nur dann jedes Ideal als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von Primäridealen dargestellt werden kann, wenn $\mathfrak{R}^*$ halbkommutativ ist. Die allgemeinen nichtkommutativen $\mathfrak{R}^*$ liefern uns lehrreiche Beispiele für die wesentlichen in § 2 bis § 5 festgestellten Abweichungen vom Kommutativen.

Die Hauptbedeutung der $\mathfrak{R}^*$ liegt darin, daß der Bereich der zweiseitigen Ideale eines endlichen hyperkomplexen Systems mit Einheit stets einen $\mathfrak{R}^*$ darstellt, und zwar haben wir es bei den hyperkomplexen Systemen nicht nur mit dem harmlosen halbkommutativen Fall zu tun, der z. B. bei den halbeinfachen hyperkomplexen Systemen vorliegt, sondern es kommen, wie durch ein Beispiel gezeigt wird, auch Systeme vor, in denen Ideale auftreten, die keine Darstellung durch Primärkomponenten besitzen.

§ 1.

Definitionen, Axiome, Rechenregeln.

Den Untersuchungen liegt ein Bereich zugrunde, dessen Elemente „Ideale" genannt und mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet werden. Es gelten folgende Axiome:

---

[2]) Besonders charakteristisch ist, daß das für die Untersuchungen von D. II grundlegende „Dedekindsche Modulaxiom" — $(\mathfrak{p}+\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{b} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{m}$, falls $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{b}$ — bei den hier behandelten Idealbereichen überhaupt nicht erfüllt zu sein braucht. Definieren wir z. B. hier für die fünf „Ideale" $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ Teilbarkeit und Multiplikation durch die Festsetzungen $\mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i < \mathfrak{a}_4$ $(i = 1, 2, 3)$; $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_0$; $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_4$; $\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_4$ $(i = 0, 1, \ldots, 4)$, so genügt der aus den $\mathfrak{a}_i$ gebildete Idealbereich den Axiomen von § 1, aber nicht dem Dedekindschen Modulaxiom, denn es ist $\mathfrak{a}_2 > \mathfrak{a}_1$, $(\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_2) \cap \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \neq (\mathfrak{a}_3 \cap \mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2$. (Vgl. hierzu D. II § 6!)

Eine Fortbildung des Dedekindschen Axiomsystems findet sich bei G. § 2.

In der Bezeichnung weiche ich insofern von D. I, D. II und G. ab, als ich an Stelle des Dedekindschen $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ für das kleinste gemeinschaftliche Vielfache im Anschluß an Di. und W. die Schreibweise $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ benutze.

I. Teilbarkeitsaxiome.

(Entsprechen den auf Unter-, Durchschnitts- und Vereinigungsmenge bezüglichen Axiomen der Mengenlehre.)

a) *Es sind zwei Beziehungen* $>$ *und* $<$ *erklärt, die durch folgende Eigenschaften ausgezeichnet sind*:

α) *Aus* $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ *folgt* $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ *und umgekehrt.*

β) *Es ist stets* $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{a}$; *ist umgekehrt* $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$, *so muß* $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ *sein*[3]).

γ) *Aus* $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} > \mathfrak{c}$ *folgt* $\mathfrak{a} > \mathfrak{c}$.

Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, so nennen wir $\mathfrak{a}$ „*durch* $\mathfrak{b}$ *teilbar*“ oder „Vielfaches von $\mathfrak{b}$“, $\mathfrak{a}$ wird als „*Teiler von* $\mathfrak{b}$“ bezeichnet; sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ verschieden, so reden wir von „echtem Vielfachen“ bzw. „echtem Teiler“. Die Schreibweise $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ verwenden wir nur dann, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ *sicher* verschieden sind; im andern Falle schreiben wir $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$. Besonders betont möge werden, daß für beliebige Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht notwendig eine der beiden Beziehungen $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ gilt.

b) *Zu zwei Idealen* $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{a}_2$ *gibt es stets einen „größten gemeinschaftlichen Teiler“* $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ *und ein „kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches“* $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ *mit folgenden Eigenschaften*:

$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ ($\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$) *ist gemeinschaftlicher Teiler* (*gemeinschaftliches Vielfaches*) *von* $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{a}_2$; *jeder gemeinschaftliche Teiler* (*jedes gemeinschaftliche Vielfache*) *von* $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{a}_2$ *ist Teiler von* $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ (*Vielfaches von* $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$). — *In Formeln haben wir also*:

$$\mathfrak{a}_1 \geqq \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2;\ \mathfrak{a}_2 \geqq \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2;\ -\ \textit{aus}\ \mathfrak{a}_1 \geqq \mathfrak{b},\ \mathfrak{a}_2 \geqq \mathfrak{b}\ \textit{folgt}\ \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 \geqq \mathfrak{b}.$$
$$\mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2;\ \mathfrak{a}_2 \leqq \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2;\ -\ \textit{aus}\ \mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{b},\ \mathfrak{a}_2 \leqq \mathfrak{b}\ \textit{folgt}\ \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \leqq \mathfrak{b}.$$

Nachdem die Existenz von $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ axiomatisch festgelegt ist, kann das Vorhandensein eines ganz analog definierten größten gemeinschaftlichen Teilers $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n$ bzw. kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n$ von endlich viel Idealen bewiesen werden. Offenbar gilt für die Bildung von größtem gemeinschaftlichen Teiler und kleinstem gemeinschaftlichen Vielfachen das *assoziative und kommutative Gesetz.*

Es sei noch folgende, aus der Definition von $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ leicht ableitbare Tatsache erwähnt:

Es ist $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1$ bzw. $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{a}_2$ bzw. $\mathfrak{a}_1 \geqq \mathfrak{a}_2$.

---

[3]) α) β) kann geradezu zur Definition der Gleichheit zweier Ideale benutzt werden.

c) *Auch eine beliebige unendliche Menge von Idealen besitzt stets einen größten gemeinschaftlichen Teiler.*

Insbesondere muß es also ein Ideal geben, das Teiler aller Ideale des Bereiches ist; es wird als das „*Einheitsideal* $\mathfrak{o}$" bezeichnet.

II. Axiome der Multiplikation.

Aus je zwei Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kann mit Hilfe einer *assoziativen*, als „*Multiplikation*" bezeichneten Operation ein neues Ideal $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ abgeleitet werden. Dabei ist:

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} \mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2+\ldots)&=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_1+\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_2+\ldots;\\ (\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2+\ldots)\cdot\mathfrak{a}&=\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{a}+\mathfrak{b}_2\cdot\mathfrak{a}+\ldots \end{aligned}\right\} \textit{distributives Gesetz},$$

$$(2)\qquad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\geqq\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\quad(\textit{Idealgesetz}).^{4})$$

Das distributive Gesetz soll auch dann gelten, wenn es sich bei $\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2+\ldots$ um den größten gemeinschaftlichen Teiler einer beliebigen unendlichen Idealmenge handelt.

Ist $\mathfrak{b}_1\geqq\mathfrak{b}_2$, so haben wir $\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2=\mathfrak{b}_2$; $\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_1+\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_2=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_2$; $(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{a}+\mathfrak{b}_2\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{b}_2\cdot\mathfrak{a}$, *d. h. es folgt aus* $\mathfrak{b}_1\geqq\mathfrak{b}_2$ *stets* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_1\geqq\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{a}\geqq\mathfrak{b}_2\cdot\mathfrak{a}$.

Genügt die Multiplikation außer Formel (1) und (2) noch dem „*kommutativen Gesetz*" $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}$, so heißt der Idealbereich „*kommutativ*". Von einem „*halbkommutativen*" Bereich sprechen wir, wenn wenigstens für zwei Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ (vgl. die Definition weiter unten!) stets $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1$ ist.

Definition 1. *Der rechtshändige bzw. linkshändige Quotient* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}^{-1}$ *bzw.* $\mathfrak{b}^{-1}\cdot\mathfrak{a}$ *ist der größte gemeinschaftliche Teiler aller der Ideale* $\mathfrak{c}$, *für die* $\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}\geqq\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}\geqq\mathfrak{a}$ *ist.*

Aus den Axiomen, insbesondere aus Formel (1) und (2) ergeben sich folgende Eigenschaften des Quotienten:

$$(3)\qquad \mathfrak{b}\cdot(\mathfrak{b}^{-1}\cdot\mathfrak{a})\geqq\mathfrak{a},\ (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}^{-1})\cdot\mathfrak{b}\geqq\mathfrak{a}.\ -\ \mathfrak{b}^{-1}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}^{-1}=\mathfrak{o},\ \textit{wenn}\ \mathfrak{b}\geqq\mathfrak{a}.\ -$$
$$\mathfrak{b}_1^{-1}\cdot\mathfrak{a}\geqq\mathfrak{b}_2^{-1}\cdot\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_1^{-1}\geqq\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_2^{-1},\ \textit{wenn}\ \mathfrak{b}_1\leqq\mathfrak{b}_2.$$

$$(4)\qquad (\mathfrak{b}^{-1}\cdot\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{c}^{-1}=\mathfrak{b}^{-1}\cdot(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}^{-1})=\mathfrak{b}^{-1}\cdot\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}^{-1}.$$

$$(5)\qquad \mathfrak{b}^{-1}\cdot(\mathfrak{c}^{-1}\cdot\mathfrak{a})=(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b})^{-1}\cdot\mathfrak{a};\quad(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}^{-1})\cdot\mathfrak{b}^{-1}=\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})^{-1}.$$

---

[4]) Die Gültigkeit der Formel (2) zeichnet in der Theorie der nichtkommutativen Ringe die zweiseitigen Ideale vor den allgemeinen Moduln und den einseitigen Idealen aus.

$$(6)\quad \mathfrak{b}^{-1}\cdot(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n) = \mathfrak{b}^{-1}\cdot\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}^{-1}\cdot\mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{b}^{-1}\cdot\mathfrak{a}_n;$$
$$(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n)\cdot\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}^{-1} \cap \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}^{-1} \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n\cdot\mathfrak{b}^{-1}.$$

$$(7)\quad (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \ldots + \mathfrak{b}_n)^{-1}\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1^{-1}\cdot\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}_2^{-1}\cdot\mathfrak{a} \cap \ldots \cap \mathfrak{b}_n^{-1}\cdot\mathfrak{a};$$
$$\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \ldots + \mathfrak{b}_n)^{-1} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_1^{-1} \cap \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_2^{-1} \cap \ldots \cap \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_n^{-1}.$$

Wir übergehen die Beweise der angeschriebenen Formeln wegen ihrer Einfachheit und weil sie sich wenigstens für den kommutativen Fall bereits in der Literatur finden [5]).

In kommutativen Bereichen fällt der Unterschied zwischen rechts- und linkshändigen Quotienten weg, Formel (4) wird bedeutungslos und Formel (5) nimmt die folgende Gestalt an:

$$(5a)\quad (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}^{-1})\cdot\mathfrak{c}^{-1} = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}^{-1})\cdot\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})^{-1}.$$

Definition 2. *Ist* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}^{-1}\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, *so heißt* $\mathfrak{b}$ *zu* $\mathfrak{a}$ *rechts bzw. links prim.*

Aus Formel (4) ergibt sich: Ist $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{a}$ rechts (links) prim, so ist es auch zu $\mathfrak{b}^{-1}\cdot\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}^{-1}$) rechts (links) prim. — Aus Formel (5) folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{b}_2$ (und also um so mehr $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$) dann und nur dann zu $\mathfrak{a}$ rechts bzw. links prim ist, wenn das gleiche von $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ gilt.

Definition 3. $\mathfrak{p}$ *heißt Primideal, wenn aus* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{p}$ *stets die Gültigkeit einer der Gleichungen* $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{p}$ *folgt, d. h. wenn ein durch* $\mathfrak{p}$ *unteilbares Ideal stets gleichzeitig rechts und links zu* $\mathfrak{p}$ *prim ist.*

III. Endlichkeitsaxiome.

a) *Ist* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots$ *eine unendliche Folge von Idealen, bei der* $\mathfrak{a}_{i+1}$ *stets Quotient von* $\mathfrak{a}_i$ *ist, d. h. die Gestalt* $\mathfrak{a}_{i+1} = \mathfrak{b}^{-1}\cdot\mathfrak{a}_i$ *oder* $\mathfrak{a}_{i+1} = \mathfrak{a}_i\cdot\mathfrak{b}^{-1}$ *besitzt, so wird von einem gewissen* n *an:* $\mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{a}_{n+2} = \mathfrak{a}_{n+3} = \ldots$.

b) *Ist* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ *eine unendliche Folge von Primidealen, bei der* $\mathfrak{p}_{i+1}$ *stets einen Teiler von* $\mathfrak{p}_i$ *darstellt, so wird von einem gwissen* n *an:* $\mathfrak{p}_{n+1} = \mathfrak{p}_{n+2} = \mathfrak{p}_{n+3} = \ldots$.

Man kann die Axiome a) und b) zusammen auch kurz so formulieren:

Jede Quotientenkette und jede Primidealteilerkette bricht im Endlichen ab.

Die Endlichkeitsaxiome bilden die Grundlage der Existenzbeweise von § 2 und § 3. Zur Verwendung gelangt vor allem folgender Schluß:

Kann aus der Tatsache, daß eine Eigenschaft A einem beliebigen Ideale $\mathfrak{a}$ zukommt, gefolgert werden, daß A auch einem echten Teiler

[5]) Fürs Kommutative vgl. z. B. D. I S. 504, wo die entsprechenden Formeln für *Moduln* abgeleitet sind, sowie K. I § 2.

von $\mathfrak{a}$ zukommen muß, der Quotient von $\mathfrak{a}$ bzw. Primideal ist, so kann A überhaupt keinem Ideale zukommen. Denn andernfalls gäbe es eine ins Unendliche laufende echte Teilerkette $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}_1 > \mathfrak{a}_2 > \ldots$, bei der A jedem der Ideale $\mathfrak{a}_i$ zukäme und außerdem $\mathfrak{a}_{i+1}$ stets Quotient von $\mathfrak{a}_i$ bzw. Primideal wäre.

Bei den Untersuchungen von § 2 stützen wir uns ausschließlich auf das Endlichkeitsaxiom a), während für den Beweis der Existenzsätze von § 3 Axiom b) unentbehrlich ist.

§ 2.

Höchste Primideale und isolierte Komponentenideale.

Definition 4. $\mathfrak{p}$ *heißt „höchstes Primideal von* $\mathfrak{a}$“, *wenn* $\mathfrak{a}$ *durch* $\mathfrak{p}$ *teilbar ist und es kein Primideal* $\mathfrak{p}_1$ *gibt, das der Ungleichung* $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}$ *genügt.*

Aus der Definition des höchsten Primideals folgt sofort:

$\mathfrak{p}$ *ist dann und nur dann höchstes Primideal von* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, *wenn es höchstes Primideal von* $\mathfrak{a}$ *oder* $\mathfrak{b}$ *ist, und wenn es kein Primideal gibt, das Teiler von* $\mathfrak{a}$ *oder* $\mathfrak{b}$ *und gleichzeitig echtes Vielfaches von* $\mathfrak{p}$ *ist.*

Weit wichtiger ist folgender Satz:

Satz 1. *Zu jedem Ideal* $\mathfrak{a}$ *gibt es nur endlich viele höchste Primideale* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ *und es ist eine Potenz von* $\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n$ *durch* $\mathfrak{a}$ *teilbar.*

Aus der Definition des Primideals läßt sich leicht schließen, daß man den zu beweisenden Satz auch folgendermaßen fassen kann:

Es gibt endlich viele Primideale $\mathfrak{p}_i \leqq \mathfrak{a}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, von denen keines durch ein anderes teilbar ist, und für die bei genügend großem r das Ideal $(\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n)^r$ ein Vielfaches von $\mathfrak{a}$ darstellt. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ sind auf Grund dieser Eigenschaft gerade die sämtlichen höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$.

Ist $\mathfrak{a}$ Primideal, so ist Satz 1 richtig. — Im andern Falle gibt es zwei durch $\mathfrak{a}$ unteilbare Ideale $\mathfrak{a}_1'$ und $\mathfrak{a}_2'$, für die $\mathfrak{a}_1' \cdot \mathfrak{a}_2' \geqq \mathfrak{a}$; setzen wir $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}_2'^{-1}$; $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1^{-1} \cdot \mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2 < \mathfrak{a}$; $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \geqq \mathfrak{a}$. Gilt nun Satz 1 für $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, so gilt er auch für $\mathfrak{a}$[6]), d. h. ist er für $\mathfrak{a}$ falsch, so muß er auch für $\mathfrak{a}_1$ oder $\mathfrak{a}_2$, also für einen als Quotienten darstell-

[6]) Es seien nämlich $\mathfrak{p}_k^{(i)}$ $(i = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots, n_i)$ die höchsten Primideale von $\mathfrak{a}_i$. Lassen wir dann aus der Reihe der $\mathfrak{p}_k^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{p}_k^{(2)}$ alle die Primideale fort, die ein $\mathfrak{p}_l^{(2)}$ bzw. $\mathfrak{p}_l^{(1)}$ als echtes Vielfaches besitzen, so ist unter den übrigbleibenden verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ keines durch ein anderes teilbar, es gelten die Ungleichungen $\mathfrak{p}_i \leqq \mathfrak{a}$, und für genügend großes r wird $(\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n) \geqq \mathfrak{a}$.

baren echten Teiler falsch sein. Aus dieser Überlegung folgt nach der Bemerkung zu den Endlichkeitsaxiomen die Richtigkeit von Satz 1 für beliebiges $\mathfrak{a}$.

Definition 5. *$\mathfrak{i}$ heißt rechtes bzw. linkes „isoliertes Komponentenideal“ (in Zukunft kurz „i. K. I.“) von $\mathfrak{a}$, wenn ein Ideal $\mathfrak{b}$ und eine natürliche Zahl r existiert, derart, daß* $\mathfrak{i} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-r} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-r-1} = \ldots$ *bzw.* $\mathfrak{i} = \mathfrak{b}^{-r} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{-r-1} \cdot \mathfrak{a} = \ldots$ *wird. Außerdem soll $\mathfrak{a}$ stets als rechtes und linkes i. K. I. von sich selbst angesehen werden*[7]).

Aus der Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-i} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-(i-1)}) \cdot \mathfrak{b}^{-1}$ bzw. $\mathfrak{b}^{-i} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{-1} \cdot (\mathfrak{b}^{-(i-1)} \cdot \mathfrak{a})$ und aus dem Endlichkeitsaxiom a) folgt, daß jedes $\mathfrak{b}$ ein rechtes bzw. linkes i. K. I. von $\mathfrak{a}$ „erzeugt“. Das durch $\mathfrak{b}$ erzeugte rechte bzw. linke i. K. I. wird mit $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ bzw. ${}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{i}^{(\mathfrak{a})}$ oder, falls keine Verwechslung zu befürchten, mit $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}}$ bzw. ${}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{i}$ bezeichnet. In kommutativen Bereichen, wo der Unterschied zwischen rechten und linken i. K. I. wegfällt, schreiben wir stets $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ und $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}}$. Im folgenden beschäftigen wir uns *ausschließlich mit rechten i. K. I.* Die Ergebnisse gelten mit selbstverständlichen Änderungen genau so gut für linke.

$$\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1} \cap \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_2}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_2 \cdot \mathfrak{b}_1} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{b}_2}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_2}, \quad \textit{wenn} \quad \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_2}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a}_1)} \cap \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a}_2)} \cap \ldots \cap \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a}_n)}, \quad \textit{wenn} \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n. \tag{11}$$

Zum Beweise der angeschriebenen Formeln werde r so groß gewählt, daß für alle in Betracht kommenden $\mathfrak{i}$ stets $\mathfrak{i}_{\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}^{-r}$ ist:

α) Aus dem distributiven, sowie dem Idealgesetz folgen die Ungleichungen: $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^{2r} \geqq \mathfrak{b}_1^r + \mathfrak{b}_2^r$†, $\mathfrak{b}_1^{2r} + \mathfrak{b}_2^{2r} \geqq (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^r$. Daraus ergibt sich weiter mit Hilfe von Formel (7): $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^{-2r} \leqq \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}_1^r + \mathfrak{b}_2^r)^{-1} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1} \cap \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_2}$; $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^{-r} \geqq \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}_1^{2r} + \mathfrak{b}_2^{2r})^{-1} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1} \cap \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_2}$.

β) Es ist $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^{2r} \geqq (\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2)^r$; $(\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2)^r \geqq (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^r$, also $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{b}_2} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^{-2r} \leqq \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2}$; $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{b}_2} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^{-r} \geqq \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2}$.

---

[7]) Die letztere Forderung ist nur nötig, wenn $\mathfrak{o}$ nicht dem „Zusatzaxiom“ von § 7, d. h. der Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{o} \cdot \mathfrak{a}$ für beliebige $\mathfrak{a}$ genügt.

[8]) Durch Ausmultiplizieren nach dem distributiven Gesetz erhalten wir eine Gleichung $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^{2r} = \sum_1 \mathfrak{c}^{(i)} + \sum_2 \mathfrak{d}^{(i)}$, bei der $\mathfrak{c}^{(i)}$ bzw. $\mathfrak{d}^{(i)}$ jeweils ein Produkt bedeutet, unter dessen Faktoren mindestens r-mal das Ideal $\mathfrak{b}_1$ bzw. $\mathfrak{b}_2$ auftritt; durch mehrfache Anwendung von Formel (2) ergibt sich weiter, daß jedes $\mathfrak{c}^{(i)}$ durch $\mathfrak{b}_1^r$, jedes $\mathfrak{d}^{(i)}$ durch $\mathfrak{b}_2^r$ teilbar ist, und daraus folgt schließlich $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^{2r} \geqq \mathfrak{b}_1^r + \mathfrak{b}_2^r$.

γ) $i_{\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2} \geqq i_{\mathfrak{b}_1} = i_{\mathfrak{b}_2}$; $i_{\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2)^{-r} \leqq \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}_1^r \cdot \mathfrak{b}_2^r)^{-r} = i_{\mathfrak{b}_1} = i_{\mathfrak{b}_2}$; — $i_{\mathfrak{b}_1} \cap i_{\mathfrak{b}_2} = i_{\mathfrak{b}_1} = i_{\mathfrak{b}_2} = i_{\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2}$ nach Formel (8).

δ) Die Richtigkeit von (11) folgt aus der distributiven Formel (7).

Satz 2. *Bedeutet* $\mathfrak{r}$ *das Produkt der höchsten Primideale von* $\mathfrak{b}$, *so ist* $i_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})} = i_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{a})}$.

Nach Satz 1 ist für genügend großes r sicher $\mathfrak{b}^r \geqq \mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}^r \geqq \mathfrak{b}$. Daraus und aus Definition des i. K. I. folgt die Behauptung.

Satz 3. *Ist in einem halbkommutativen Bereich (vgl. die Definition in* § 1, II) $\mathfrak{b} = i_{\mathfrak{l}}^{(\mathfrak{a})}$ *ein i. K. I. von* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c} = i_{\mathfrak{m}}^{(\mathfrak{b})}$ *ein solches von* $\mathfrak{b}$, *so ist* $\mathfrak{c}$ *auch i. K. I. von* $\mathfrak{a}$, *und zwar haben wir* $\mathfrak{c} = i_{\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{m}}^{(\mathfrak{a})}$.

Es sei $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{w}$ das Produkt der höchsten Primideale von $\mathfrak{l}$ bzw. $\mathfrak{m}$ und es sei r so groß gewählt, daß $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v}^{-r}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{w}^{-r}$, $i_{\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{m}}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w})^{-r}$ wird. Dann folgt aus der nach Voraussetzung gültigen Gleichung $\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w} = \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{v}$ sofort $i_{\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{m}}^{(\mathfrak{a})} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v}^{-r}) \cdot \mathfrak{w}^{-r} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{w}^{-r} = \mathfrak{c}$.

In beliebigen nichtkommutativen Bereichen braucht das (rechte) i. K. I. eines (rechten) i. K. I. nicht notwendig (rechtes) i. K. I. des ursprünglichen Ideals zu sein[9]). Es ist daher zweckmäßig, im allgemeinen Fall den Begriff des i. K. I. folgendermaßen zu verallgemeinern:

Definition 6. $\mathfrak{i}$ *heißt rechtes (linkes) „verallgemeinertes i. K. I." oder kurz „v. i. K. I." von* $\mathfrak{a}$, *wenn sich zwei Ketten* $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n = \mathfrak{i}$ *und* $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$ *finden lassen, so daß* $\mathfrak{a}_i = i_{\mathfrak{b}_i}^{(\mathfrak{a}_{i-1})}$ $(\mathfrak{a}_i = {}_{\mathfrak{b}_i} i^{(\mathfrak{a}_{i-1})})$ *wird.*

Um den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{a}$ auszudrücken, bedient man sich am besten der Schreibweise $i_{\mathfrak{b}_1 | \mathfrak{b}_2 | \ldots | \mathfrak{b}_n}^{(\mathfrak{a})}$ $({}_{\mathfrak{b}_n | \ldots | \mathfrak{b}_2 | \mathfrak{b}_1} i^{(\mathfrak{a})})$. Wir beschäftigen uns fast ausschließlich mit i. K. I. im ursprünglichen Sinne („g. i. K. I." zum Unterschied von den v. i. K. I.).

§ 3.

Zugehörige Primideale.

Definition 7. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ heißt rechts (links) zu $\mathfrak{a}$ gehörig, wenn $i_{\mathfrak{p}} < \mathfrak{a}$; $i_{\mathfrak{p}}^{-1} \cdot \mathfrak{a} \geqq \mathfrak{p}$ $({}_{\mathfrak{p}}i < \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \cdot {}_{\mathfrak{p}}i^{-1} \geqq \mathfrak{p})$ ist[10]). Wir beschränken uns bei unseren Untersuchungen auf rechts zugehörige Primideale. Die gewonnenen Ergebnisse gelten natürlich in entsprechender Weise für links zugehörige.

Zusatz zu Definiton 7. *Das rechts zugehörige Primideal kann auch folgendermaßen eingeführt werden:*

---

[9]) Vgl. das am Schlusse von § 8 ausgeführte Beispiel!

[10]) Treibt man Idealtheorie in einem kommutativen Ring, so führen die Definitionen 5 und 7 nach K. I § 4 zu den zugehörigen Primidealen und isolierten Komponentenidealen im Sinne von N.

Das Primideal $\mathfrak{p}$ *gehört rechts zu* $\mathfrak{a}$, *wenn aus* $i_\mathfrak{b} = i_\mathfrak{p} < \mathfrak{a}$ *stets* $\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{p}$ *folgt.*

Ist $i_\mathfrak{b} = i_\mathfrak{p}$, so gilt eine Gleichung $i_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{b}^r \geqq \mathfrak{a}$, aus $i_\mathfrak{b} = i_\mathfrak{p}$, $i_\mathfrak{p}^{-1} \cdot \mathfrak{a} \geqq \mathfrak{p}$ folgt also $\mathfrak{b}^r \geqq \mathfrak{p}$ und wegen der Primidealeigenschaft von $\mathfrak{p}$ auch $\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{p}$. Sollte umgekehrt $i_\mathfrak{p}^{-1} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein, so haben wir $i_\mathfrak{b} = i_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{p} < \mathfrak{p}$. — Aus dem Zusatz folgt angesichts der Gleichung $i_\mathfrak{p} = i_{\mathfrak{a}+\mathfrak{p}}$:

Jedes rechts zu $\mathfrak{a}$ *gehörige Primideal ist Teiler von* $\mathfrak{a}$.

Beim Beweis des folgenden Satzes benützen wir zum ersten Male Endlichkeitsaxiom b):

Satz 4. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1}$ *ist dann und nur dann echter Teiler von* $\mathfrak{a}$, *wenn* $\mathfrak{b}$ *durch ein rechts zu* $\mathfrak{a}$ *gehöriges Primideal teilbar ist.*

Nur die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung bedarf eines Beweises. Ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1} < \mathfrak{a}$, so genügt nach Formel (5) und Satz 1 auch ein höchstes Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{b}$ der Ungleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{p}^{-1} < \mathfrak{a}$. Nach Definition des höchsten Primideals ist $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{b}$; gilt das Gleichheitszeichen, so gehört $\mathfrak{p}$ entweder rechts zu $\mathfrak{a}$, oder es gibt ein Ideal $\mathfrak{c} < \mathfrak{p}$, für das $i_\mathfrak{c} = i_\mathfrak{p} < \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}^{-1} < \mathfrak{a}$ ist; dann aber können wir ein höchstes Primideal $\mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}$ von $\mathfrak{c}$ so auswählen, daß auch $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{p}_1^{-1}$ einen echten Teiler von $\mathfrak{a}$ darstellt.

Mit Hilfe dieser Überlegungen und der am Ende von § 1 angegebenen Schlußweise erkennt man, daß es bei Gültigkeit von Endlichkeitsaxiom b) kein Ideal $\mathfrak{b}$ geben kann, das der Ungleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1} < \mathfrak{a}$ genügt, ohne durch ein rechts zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal teilbar zu sein.

Aus Satz 4 und der Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{o}$ folgt:

Satz 5. *Ein von* $\mathfrak{o}$ *verschiedenes Ideal* $\mathfrak{a}$ *besitzt stets mindestens ein rechts zugehöriges Primideal.*

Satz 6. *In einem halbkommutativen*[11]) *Bereich gehören zu* $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ *rechts sämtliche höchsten Primideale von* $\mathfrak{a}$.

Ist $\mathfrak{p}$ das einzige höchste Primideal von $\mathfrak{a}$, so wird (auch für $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$) sicher $i_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}^{-1} \cdot \mathfrak{a} \geqq \mathfrak{p}$. — Gehören andrerseits zu $\mathfrak{a}$ außer $\mathfrak{p}$ noch die höchsten Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$, so kann man aus Satz 1 und der vorausgesetzten Vertauschbarkeit der Primideale schließen, daß $i_\mathfrak{p}$ Teiler einer Potenz von $\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n$ und daher durch $\mathfrak{p}$ unteilbar ist. Daraus folgt aber wieder $i_\mathfrak{p} < \mathfrak{a}$; $i_\mathfrak{p}^{-1} \cdot \mathfrak{a} \geqq \mathfrak{p}$.

Satz 7. *Zu* $\mathfrak{a}$ *gehören stets rechts nur endlich viele Primideale.*

Bei dem in sechs Schritten zu führenden Beweis bedeutet $\mathfrak{p}$ stets ein rechts zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal.

---

[11]) In allgemeinen nichtkommutativen Bereichen gilt Satz 6 nicht. Vgl. die Beispiele am Schlusse von § 8.

α) *Jede Kette* $\mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}_2 > \mathfrak{p}_3 > \ldots$ *besitzt nach Endlichkeitsaxiom* b) *nur endlich viele Glieder.*

β) *Jede Kette* $\mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2 < \mathfrak{p}_3 < \ldots$ *besitzt nach Endlichkeitsaxiom* a) *nur endlich viele Glieder*; denn man kann aus ihr die Kette $i_{\mathfrak{p}_1} > i_{\mathfrak{p}_2} > i_{\mathfrak{p}_3} > \ldots$ ableiten, bei der $i_{\mathfrak{p}_{k+1}} = i_{\mathfrak{p}_k} \cdot i_{\mathfrak{p}_{k+1}}^{-r_k}$ stets Quotient von $i_{\mathfrak{p}_k}$ ist.

γ) *Jede Kette* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$, *bei der kein* $\mathfrak{p}_i$ *durch ein anderes teilbar ist, besitzt nach Endlichkeitsaxiom* a) *nur endlich viele Glieder*; denn man kann aus ihr die Kette $i_{\mathfrak{p}_1} > i_{\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2} = i_{\mathfrak{p}_1} \cdot (\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2)^{-r_2} > i_{\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3} = i_{\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2} \cdot (\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3)^{-r_3} > \ldots$ ableiten.

In der Tat, es ist $i_{\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_{r-1}} \geqq i_{\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r}$; gälte das Gleichheitszeichen, so hätten wir wegen $i_{\mathfrak{p}_r} \geqq i_{\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r}$ und Formel (8) sicher $i_{(\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_{r-1}) + \mathfrak{p}_r} = i_{\mathfrak{p}_r}$. Diese letztere Gleichung ist aber unmöglich, weil bei unseren Annahmen über die $\mathfrak{p}_i$ das Ideal $(\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_{r-1}) + \mathfrak{p}_r$ einen echten Teiler von $\mathfrak{p}_r$ darstellt.

δ) *Zu jedem* $\mathfrak{p}$ *gibt es eine natürliche Zahl* s, *die „Stufe von* $\mathfrak{p}$“[12]), *die dadurch charakterisiert ist, daß keine Kette* $\mathfrak{p} > \mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}_2 > \ldots$ *mehr als* s *Glieder besitzt, während mindestens eine* s*-gliedrige derartige Kette wirklich auftritt.*

Gibt es kein $\mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}$, so besitzt $\mathfrak{p}$ nach Definition die Stufe 1. Im andern Falle existieren endlich viel Ideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$, für die $\mathfrak{p} > \mathfrak{p}_i$ ist, während es kein der Ungleichung $\mathfrak{p} > \mathfrak{p}_0 > \mathfrak{p}_i$ genügendes $\mathfrak{p}_0$ gibt. (Daß die $\mathfrak{p}_i$ nur in endlicher Anzahl vorhanden sein können, folgt aus γ), daß mindestens ein $\mathfrak{p}_i$ existiert, erkennt man aus β), indem man von einem beliebigen, der Ungleichung $\mathfrak{p} > \mathfrak{p}'$ genügenden $\mathfrak{p}'$ ausgeht, und eine Kette $\mathfrak{p}' < \mathfrak{p}'' < \mathfrak{p}''' < \ldots < \mathfrak{p}$ bildet.) Besitzt nun jedes $\mathfrak{p}_i$ eine Stufe s_i, so besitzt $\mathfrak{p}$ die Stufe $\max(s_i) + 1$. Die Annahme, $\mathfrak{p}$ besäße keine Stufe, führt also zu der Folgerung, daß das gleiche von einem echten Primidealteiler $\mathfrak{p}_i$ gelten muß, und damit zu einem Widerspruch gegen Endlichkeitsaxiom b).

ε) *Für die Stufe eines rechts zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Primideals existiert eine obere Schranke* s_0.

Wir nennen für den Augenblick $\mathfrak{p}$ „rechtes höchstes Primideal von $\mathfrak{a}$“[13]), wenn es keine $\mathfrak{p}_0 > \mathfrak{p}$ gibt. Aus γ) folgt, daß nur endlich viel rechte höchste Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ vorhanden sein können. Bedeutet s_i die Stufe von $\mathfrak{p}_i$, so ist $\max(s_i)$ die gesuchte obere Schranke, weil wie aus β) zu ersehen, jedes $\mathfrak{p}$ Teiler eines $\mathfrak{p}_i$ sein muß.

---

[12]) Eine ganz ähnliche Verwendung des Wortes „Stufe“ findet man D. II, § 7.

[13]) Ein „rechtes höchstes Primideal“ von $\mathfrak{a}$ braucht kein „höchstes Primideal“ im Sinne von Definition 4 zu sein!

ζ) *Es gibt nach* γ) *nur endlich viel Primideale* $\mathfrak{p}$ *einer festen Stufe.*

Bedeutet r_s die Anzahl der Ideale der Stufe s, so ist $r_1 + r_2 + \ldots + r_{s^0}$ die Gesamtzahl der rechts zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale. Hiermit ist Satz 7 bewiesen und gleichzeitig der wichtige Stufenbegriff gewonnen. Von besonderer Bedeutung sind, wie sich später zeigen wird, die Primideale der Stufe 1.

Satz 8. *Zu* $\mathfrak{b}^{-1} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{f}$ *gehören rechts nur solche Primideale, die auch rechts zu* $\mathfrak{a}$ *gehören.*

Ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{a}$, so ist nach Formel (4) auch $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{f}$. Aus derselben Formel folgt, daß die Gleichung $\mathfrak{i}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{i}_\mathfrak{p}^{(\mathfrak{a})}$ $(\mathfrak{r} < \mathfrak{p})$ stets die Gleichung $\mathfrak{i}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{f})} = \mathfrak{i}_\mathfrak{p}^{(\mathfrak{f})}$ nach sich zieht. Ein Primideal, das nicht rechts zu $\mathfrak{a}$ gehört, kann daher auch unmöglich rechts zu $\mathfrak{f}$ gehören.

Satz 9. *Zu* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{g}$ *gehören rechts jedenfalls alle die Primideale, die rechts zu* $\mathfrak{a}$ *gehören und keine Teiler von* $\mathfrak{b}$ *sind.*

Ist $\mathfrak{i}_\mathfrak{p}^{(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{i}_\mathfrak{c}^{(\mathfrak{g})} = \mathfrak{i}_\mathfrak{p}^{(\mathfrak{g})}$, so haben wir $\mathfrak{i}_\mathfrak{b}^{(\mathfrak{a})} \leqq \mathfrak{i}_\mathfrak{p}^{(\mathfrak{a})}$ bzw. $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{a})} \leqq \mathfrak{i}_\mathfrak{p}^{(\mathfrak{a})}$, und also $\mathfrak{i}_{\mathfrak{p}+\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{i}_\mathfrak{p}^{(\mathfrak{a})}$ bzw. $\mathfrak{i}_{\mathfrak{p}+\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{i}_\mathfrak{p}^{(\mathfrak{a})}$. Aus diesem Zusammenhang und der Definition des rechts zugehörigen Primideals folgt die Behauptung. Im kommutativen Fall, wo der Unterschied zwischen rechts und links zugehörigen Primidealen, sowie zwischen rechten und linken Quotienten wegfällt, erhalten wir durch Verknüpfung von Satz 8 und 9:

Satz 10. *In einem kommutativen Bereich gehören zu* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1}$ *nur solche Primideale, die zu* $\mathfrak{a}$ *gehören; insbesondere gehören zu* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1}$ *alle zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Primideale, die nicht Teiler von* $\mathfrak{b}$ *sind.*

§ 4.

Zusammenhang zwischen i. K. I. und zugehörigen Primidealen.

Satz 11. *Ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *besitzt stets nur endlich viele rechte v. i. K. I.*

Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die endlich vielen rechts zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale, $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1|\mathfrak{b}_2|\ldots|\mathfrak{b}_m}^{(\mathfrak{a})} \neq \mathfrak{a}$ sei ein rechtes v. i. K. I. Ohne wesentliche Beschränkung darf vorausgesetzt werden, daß $\mathfrak{b}_1$ durch ein rechts zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal, etwa durch $\mathfrak{p}_i$, teilbar ist; denn andernfalls wäre $\mathfrak{b}_1$ rechts zu $\mathfrak{a}$ prim, und wir hätten $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1|\mathfrak{b}_2|\ldots\,\mathfrak{b}_m}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_2|\mathfrak{b}_3|\ldots|\mathfrak{b}_m}^{(\mathfrak{a})}$. Ist $\mathfrak{b}_1 > \mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{i}_{\mathfrak{p}_i}^{(\mathfrak{a})}$, so ist $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1|\mathfrak{b}_2\ldots|\mathfrak{b}_m}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{p}_i|\mathfrak{b}_1|\ldots|\mathfrak{b}_m}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1|\mathfrak{b}_2|\ldots|\mathfrak{b}_m}^{(\mathfrak{a}_i)}$. Gehören also zu den endlich vielen Idealen $\mathfrak{a}_i$ jeweils nur endlich viele rechte v. i. K. I., so gehören auch zu $\mathfrak{a}$ nur endlich viele rechte v. i. K. I. Da die $\mathfrak{a}_i$ sämtlich echte Teiler und Quotienten von $\mathfrak{a}$ sind, folgt daraus mit Hilfe von Endlichkeitsaxiom a) nach bekannten Schlüssen die Richtigkeit unsrer Behauptung. Im weiteren Verlauf des Paragraphen beschäftigen wir uns ausschließlich mit i. K. I. im engeren Sinne.

Satz 12. *Zu* $i_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ *gehört rechts kein Primideal, das Teiler von* $\mathfrak{b}$ *ist. Andrerseits gehören rechts zu* $i_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ *alle die Primideale, die rechts zu* $\mathfrak{a}$ *gehören und keine Teiler von* $\mathfrak{b}$ *sind.*

Behauptung selbstverständlich nach Definition des i. K. I., sowie nach Satz 9.

Satz 13. *Sind* $i_{\mathfrak{b}}$ *und* $i_{\mathfrak{c}}$ *zwei rechte i. K. I. von* $\mathfrak{a}$, *zu denen rechts die gleichen Primideale gehören, so ist* $i_{\mathfrak{b}} = i_{\mathfrak{c}}$.

Aus Satz 12 und Satz 4 folgt, daß $i_{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{c}^{-1} = i_{\mathfrak{b}}$ und $i_{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{-1} = i_{\mathfrak{c}}$ ist; daraus ergibt sich weiter: $i_{\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}} = i_{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}} = i_{\mathfrak{b}} = i_{\mathfrak{c}}$. Satz 12 und Satz 13 können im halbkommutativen Fall wesentlich verschärft werden. Zunächst gilt:

Satz 12a[14]). *Zu einem halbkommutativen Bereich gehören zu* $i_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{b}$ *rechts alle und nur die Primideale, die rechts zu* $\mathfrak{a}$ *gehören und keine Teiler von* $\mathfrak{b}$ *sind.*

Der wesentliche Unterschied gegenüber Satz 12 liegt darin, daß im halbkommutativen Fall zu $i_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ rechts *nur* solche Primideale gehören, die auch rechts zu $\mathfrak{a}$ gehören. In der Tat, aus Satz 3 von § 2 folgt, daß hier die Gleichung $i_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{a}$ bzw. $i_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{a})} = i_{\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{a})}$ stets die Gleichung $i_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}$ bzw. $i_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{b})} = i_{\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{b})}$ nach sich zieht, und daraus kann man schließen, daß ein rechts zu $\mathfrak{b}$ gehöriges Primideal sicher auch rechts zu $\mathfrak{a}$ gehört.

Um die im halbkommutativen Fall mögliche Verschärfung von Satz 13 bequem zu formulieren, führen wir folgende Bezeichnung ein:

Es sei S^* die Schar aller rechts zu $\mathfrak{a}$ gehöriger Primideale; dann soll eine Teilschar S von S^* *isoliert* heißen, wenn S gleichzeitig mit $\mathfrak{p}$ alle diejenigen Primideale aus S^* enthält, die Vielfache von $\mathfrak{p}$ sind. Auch die überhaupt kein Primideal enthaltende „leere Schar“ soll als isolierte Teilschar von S^* angesehen werden.

Satz 13a[15]). *In einem halbkommutativen Bereich entspricht jedem rechten i. K. I.* $\mathfrak{i}$ *von* $\mathfrak{a}$ *eindeutig umkehrbar eine isolierte Teilschar* S *von* S^*, *deren Primideale gerade die rechts zu* $\mathfrak{i}$ *gehörigen Primideale darstellen.*

Zum Beweis hat man Satz 12a und Satz 13 zu beachten, und zu bedenken, daß zu gegebenem S stets ein $\mathfrak{i}$ gefunden werden kann, nämlich zu S^* das Ideal $\mathfrak{a}$ selbst, und zu $S \neq S^*$ das Ideal $i_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{a})}$, bei dem $\mathfrak{r}$ das Produkt aller in S^*, aber nicht in S vorkommender Primideale bedeutet.

Mit Satz 3 und Satz 13a ist das Problem der Bestimmung sämtlicher rechter i. K. I. für den halbkommutativen Fall im wesentlichen gelöst, bzw. auf das der Bestimmung sämtlicher rechts zugehöriger Primideale

---

[14]) Vgl. K. II § 3.
[15]) Vgl. K. II § 3.

zurückgeführt. Wir heben noch eine im Halbkommutativen mögliche Verschärfung von Formel (8) hervor:

Satz 14. *Gehören in einem halbkommutativen Bereich die rechten i. K. I.* $\mathfrak{i}_1^{(\mathfrak{a})}$ *und* $\mathfrak{i}_2^{(\mathfrak{a})}$ *zu den isolierten Teilscharen* S_1 *und* S_2, *so stellt* $\mathfrak{i}_1^{(\mathfrak{a})} \cap \mathfrak{i}_2^{(\mathfrak{a})}$ *dasjenige rechte i. K. I. von* $\mathfrak{a}$ *dar, das zur Vereinigungsschar (im Sinne der Mengentheorie) von* S_1 *und* S_2 *gehört.*

Ist etwa $\mathfrak{i}_1^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{a}$, so ist die Behauptung trivial. — Sind aber $\mathfrak{i}_1^{(\mathfrak{a})}$ und $\mathfrak{i}_2^{(\mathfrak{a})}$ beide von $\mathfrak{a}$ verschieden, so gibt es zwei Ideale $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, derart, daß $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{i}_1^{(\mathfrak{a})}$, $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_2}^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{i}_2^{(\mathfrak{a})}$ wird. Dann ist nach Formel (8): $\mathfrak{i}_1^{(\mathfrak{a})} \cap \mathfrak{i}_2^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2}^{(\mathfrak{a})}$, und aus Satz 12a folgt, daß $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$ durch alle und nur die Primideale von S^* teilbar ist, die weder in S_1 noch in S_2 auftreten.

§ 5.

Hauptprimideale, Hauptkomponenten und Ableitungen.

Hilfssatz. *Zu jedem rechts zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Primideal* $\mathfrak{p}$ *gibt es ein und nur ein rechtes i. K. I.* $\mathfrak{g}$, *zu dem rechts* $\mathfrak{p}$, *aber kein durch* $\mathfrak{p}$ *unteilbares Primideal gehört.* $\mathfrak{g}$ *kann als größter gemeinschaftlicher Teiler aller und nur der rechten v. i. K. I.* $\mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_1|\mathfrak{b}_2|\ldots|\mathfrak{b}_m}$ *definiert werden, bei denen* $\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{b}_m$ *durch* $\mathfrak{p}$ *unteilbar ist.*

Die Eindeutigkeit folgt aus dem beim Beweise von Satz 13 benutzten Schlusse. Um die Existenz nachzuweisen, denken wir uns alle rechten v. i. K. I. von $\mathfrak{a}$ irgendwie geordnet angeschrieben: $\mathfrak{i}_k = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_{k1}|\mathfrak{b}_{k2}|\ldots|\mathfrak{b}_{km_k}}$ $(k = 1, 2, \ldots, t)$ und bezeichnen mit $\mathfrak{r}$ das Produkt aller durch $\mathfrak{p}$ unteilbaren $\mathfrak{b}_{ki}$. Dann ist $\mathfrak{i}_\mathfrak{r}$ das gesuchte $\mathfrak{g}$. Denn zunächst ist leicht zu sehen, daß zu $\mathfrak{i}_\mathfrak{r}$ rechts kein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Primideal gehören kann. Aus der Konstruktion ergibt sich ferner unmittelbar, daß $\mathfrak{i}_\mathfrak{r}$ Teiler aller der $\mathfrak{i}_k$ ist, bei denen kein $\mathfrak{b}_{ki}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Stellt schließlich umgekehrt irgendein $\mathfrak{b}_{ki}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{p}$ dar, so haben wir $\mathfrak{i}_\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{i}_k$, aus $\mathfrak{i}_k \geqq \mathfrak{g} = \mathfrak{i}_\mathfrak{r}$ folgte daher hier $\mathfrak{i}_{\mathfrak{r}+\mathfrak{p}} = \mathfrak{i}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r} + \mathfrak{p} < \mathfrak{p}$ im Widerspruch zu der Annahme, daß $\mathfrak{p}$ rechts zu $\mathfrak{a}$ gehört.

Definition 8. *Die rechts zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Primideale erster Stufe,* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$, *sollen auch „rechte Hauptprimideale" von* $\mathfrak{a}$ *heißen. Als „erste rechte Hauptkomponenten" bezeichnen wir die den* $\mathfrak{p}_i$ *im Sinne des Hilfssatzes entsprechenden rechten i. K. I.* $\mathfrak{g}_i$, *unter den „ersten rechten Ableitungen" verstehen wir die von* $\mathfrak{o}$ *verschiedenen Ideale aus der Reihe* $\mathfrak{i}_{\mathfrak{p}_1}^{(\mathfrak{g}_1)}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{p}_2}^{(\mathfrak{g}_2)}, \ldots, \mathfrak{i}_{\mathfrak{p}_n}^{(\mathfrak{g}_n)}$.

Ein Ideal wird „r-tes rechtes Hauptprimideal" bzw. „r-te rechte Hauptkomponente" bzw. „r-te rechte Ableitung" von $\mathfrak{a}$ *genannt, wenn es ein erstes rechtes Hauptprimideal bzw. eine erste rechte Hauptkomponente bzw. eine erste rechte Ableitung einer* $r - 1$*-ten rechten Ableitung darstellt.*

Im halbkommutativen Fall sind die r-ten rechten Hauptprimideale gerade mit den rechts zugehörigen Primidealen r-ter Stufe identisch.

Die rechten Hauptkomponenten, sowie die rechten Ableitungen aller Reihen sind rechte v.i.K.I. von $\mathfrak{a}$ und es gibt zu jeder r-ten rechten Ableitung $\mathfrak{a}_r$ eine $r-1$-te rechte Ableitung $\mathfrak{a}_{r-1} > \mathfrak{a}_r$. Aus Satz 11 folgt daher:

Es gibt nur endlich viele Reihen[16]) *von rechten Hauptprimidealen, Hauptkomponenten und Ableitungen.*

Die Bedeutung der ersten rechten Hauptkomponenten zeigt sich in folgenden Sätzen:

Satz 15. $\mathfrak{a}$ *ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache seiner ersten rechten Hauptkomponenten* $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$. *Die Darstellung* $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_n$ *soll „rechte Hauptdarstellung" von* $\mathfrak{a}$ *heißen.*

Es sei $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{i}_{r_i}$. Dann ist $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n$ durch kein rechts zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal teilbar, und wir haben daher $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n)^{-1} = \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}_1^{-1} \cap \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}_2^{-1} \cap \ldots \cap \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}_n^{-1} = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_n$.

Definition 9. *Eine Darstellung* $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{i}_m$ *heißt „rechts isoliert reduziert", wenn die* $\mathfrak{i}_k$ *sämtlich rechte v.i.K.I. von* $\mathfrak{a}$ *sind, und wenn in der gegebenen Darstellung keine Komponente durch einen echten Teiler, der gleichfalls rechtes v.i.K.I. von* $\mathfrak{a}$ *ist, ersetzt werden kann.*

Satz 16. *Eine kleinste gemeinschaftliche Vielfachendarstellung von* $\mathfrak{a}$ *ist dann und nur dann rechts isoliert reduziert, wenn sie aus der rechten Hauptdarstellung durch gruppenweise Zusammenfassung der Komponenten entsteht.*

Nach dem Hilfssatz ist jedes rechte v.i.K.I. von $\mathfrak{a}$, das einen echten oder unechten Teiler einer von $\mathfrak{g}_i$ verschiedenen rechten Hauptkomponente oder einen echten Teiler von $\mathfrak{g}_i$ darstellt, Teiler von $\mathfrak{i}_{\mathfrak{p}_i}$. Daraus folgt, daß die rechte Hauptdarstellung, sowie jede aus ihr durch gruppenweise Komponentenzusammenfassung entstehende Darstellung rechts isoliert reduziert ist. Es sei ferner $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{i}_l$, $\mathfrak{i}_k = \mathfrak{i}_{\mathfrak{b}_{k1} | \mathfrak{b}_{k2} | \ldots | \mathfrak{b}_{km_k}}$, $\mathfrak{r}_k = \prod_{i=1}^{m_k} \mathfrak{b}_{ki}$, und es bedeute $\mathfrak{i}_k^*$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller der Hauptkomponenten, die Teiler von $\mathfrak{i}_k$ sind bzw. das Einheitsideal $\mathfrak{o}$, falls $\mathfrak{i}_k$ durch überhaupt keine Hauptkomponente teilbar ist. Dann ergibt sich nacheinander durch Benutzung des Hilfsatzes und des Satzes 15: $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_l + \mathfrak{p}_k < \mathfrak{p}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_l)^{-1}$; $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}_1^* \cap \mathfrak{i}_2^* \cap \ldots \cap \mathfrak{i}_l^*$. In der zuletzt gewonnenen Darstellung können alle

[16]) Zwei Hauptkomponenten, Hauptprimideale, Ableitungen werden in dieselbe Reihe gerechnet, wenn sie gleichen Index haben.

die Komponenten, die gleich $\mathfrak{o}$ sind, weggelassen werden. Sollten ferner etwa $\mathfrak{i}_r$ und $\mathfrak{i}_s$ Vielfache ein und derselben Hauptkomponente sein, so kann man in $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}_1^* \cap \mathfrak{i}_2^* \cap \ldots \cap \mathfrak{i}_l^*$ das Ideal $\mathfrak{i}_r^*$ durch einen echten Teiler ersetzen, nämlich durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller der Hauptkomponenten, die Teiler von $\mathfrak{i}_r^*$, aber nicht von $\mathfrak{i}_s^*$ sind.

Zieht man aus den angestellten Überlegungen die Schlußfolgerungen, so ergibt sich die Richtigkeit von Satz 16. Als wichtiger Zusatz zu Satz 16 ist hervorzuheben:

Jede rechts isoliert reduzierte Darstellung von $\mathfrak{a}$ *durch rechte v. i. K. I. ist auch eine solche durch rechte g. i. K. I.*

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ soll „rechts isoliert irreduzibel" heißen, wenn es keine Darstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{i}_m$ gibt, bei der die $\mathfrak{i}_k$ rechte v. i. K. I. und echte Teiler von $\mathfrak{a}$ sind. Dann haben wir:

Satz 17. *Ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *ist dann und nur dann rechts isoliert irreduzibel, wenn es nur ein einziges erstes rechtes Hauptprimideal (und mithin nur eine einzige erste rechte Hauptkomponente, und nur eine einzige erste rechte Ableitung) besitzt. — Sämtliche rechte Hauptkomponenten eines Ideals sind rechts isoliert irreduzibel.*

Beweis überflüssig. — Die Bedeutung der ersten rechten Ableitungen zeigt der folgende Satz, dessen Richtigkeit aus Satz 17 oder auch unmittelbar erschlossen werden kann.

Satz 18. *Ein rechts isoliert irreduzibles Ideal* $\mathfrak{g}$ *besitzt dann und nur dann eine erste rechte Ableitung* $\mathfrak{i}_\mathfrak{p}$, *wenn es ein der Ungleichung* $\mathfrak{g} > \mathfrak{i} > \mathfrak{o}$ *genügendes rechtes i. K. I. von* $\mathfrak{g}$ *gibt. In diesem letzteren Falle ist die erste rechte Ableitung gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller der rechten i. K. I., die echte Teiler von* $\mathfrak{g}$ *sind.*

Für beliebige rechte Hauptkomponenten gilt folgender, mit Hilfe von Satz 16 und Formel (6) leicht beweisbarer Satz:

Satz 19. *Jedes rechte v. i. K. I. von* $\mathfrak{a}$ *läßt sich als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von rechten Hauptkomponenten der verschiedenen Reihen darstellen.*

Doch ist die durch Satz 19 gewährleistete Darstellung nicht eindeutig bestimmt, sie braucht insbesondere nicht die rechte Hauptdarstellung des betreffenden v. i. K. I. zu sein. Auch ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache beliebiger rechter Hauptkomponenten nicht immer ein rechtes v. i. K. I. von $\mathfrak{a}$. Satz 19 ist daher wesentlich von Bedeutung als Ausgangspunkt für *neue* Fragestellungen.

Es möge schließlich noch auf ein anderes Problem hingewiesen werden, das uns — in einem ganz einfachen Spezialfall — in § 8 kurz beschäftigen wird:

Kann man — im nichtkommutativen oder auch im halbkommutativen Fall — tieferliegende Beziehungen finden zwischen rechten und den ganz analog zu definierenden linken Hauptkomponenten, Hauptprimidealen und Ableitungen?

§ 6.

Der Restklassenbereich.

Den Untersuchungen dieses Paragraphen möge folgende, in Zukunft oft benutzte Definition vorausgeschickt werden:

Definition 10. *Gibt es in einem Idealbereich ein durch alle Ideale teilbares Ideal* $\mathfrak{n}$, *so soll* $\mathfrak{n}$ *als das „Nullideal" des Bereiches bezeichnet werden.*

Es sei jetzt $\mathfrak{R}$ ein Idealbereich, der den Axiomen der Gruppen I und II, aber nicht notwendig den Endlichkeitsaxiomen der Gruppe III von § 1 genügt, $\mathfrak{m}$ sei ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$. Dann sollen zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ „*modulo* $\mathfrak{m}$ *kongruent*" heißen, wenn $\mathfrak{a}+\mathfrak{m}=\mathfrak{b}+\mathfrak{m}$. Die Gesamtheit aller Ideale aus $\mathfrak{R}$, die zu einem festen Ideal $\mathfrak{a}$ modulo $\mathfrak{m}$ kongruent sind, bilden eine „*Restklasse nach* $\mathfrak{m}$", für die wir die Schreibweise $\bar{\mathfrak{a}}$ benutzen. Eine Restklasse ist durch jedes in ihr auftretende Ideal eindeutig bestimmt; jede Restklasse enthält ein und nur ein ausgezeichnetes Ideal $\mathfrak{a}^*$, für das $\mathfrak{a}^*+\mathfrak{m}=\mathfrak{a}^*$, d. h. $\mathfrak{m}\geqq\mathfrak{a}^*$ ist. *Die Gesamtheit aller Restklassen nach* $\mathfrak{m}$ *kann daher eindeutig umkehrbar den Teilern von* $\mathfrak{m}$ *zugeordnet werden.*

Satz 20. *Aus* $\mathfrak{R}$ *erhält man mit Hilfe eines beliebigen Ideals* $\mathfrak{m}$ *einen neuen Idealbereich* $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$, *den „Restklassenbereich nach* $\mathfrak{m}$", *indem man die Restklassen nach* $\mathfrak{m}$ *als Elemente einführt und für sie Teilbarkeit und Multiplikation durch die Festsetzungen* $\bar{\mathfrak{a}}\geqq\bar{\mathfrak{b}}$, *wenn* $\mathfrak{a}^*\geqq\mathfrak{b}^*$; $\overline{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}=\bar{\mathfrak{a}}\cdot\bar{\mathfrak{b}}$ *definiert. Gleichzeitig mit* $\mathfrak{R}$ *ist stets auch* $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$ *kommutativ. Es gelten folgende Formeln:*

$$\overline{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}=\bar{\mathfrak{a}}+\bar{\mathfrak{b}};\qquad \overline{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}=\bar{\mathfrak{a}}\cap\bar{\mathfrak{b}}. \tag{12}$$

$$\overline{\mathfrak{a}^*\cdot\mathfrak{b}^{*-1}}=\bar{\mathfrak{a}}\cdot\bar{\mathfrak{b}}^{-1};\quad \overline{\mathfrak{b}^{*-1}\cdot\mathfrak{a}^*}=\bar{\mathfrak{b}}^{-1}\cdot\bar{\mathfrak{a}}. \tag{13}$$

Beweis klar. Bei Formel (13) ist zu beachten, daß unter dem Querstrich auf den linken Seiten die ausgezeichneten Ideale $\mathfrak{a}^*$ und $\mathfrak{b}^*$ aus den Restklassen $\bar{\mathfrak{a}}$ und $\bar{\mathfrak{b}}$ stehen.

Aus Satz 20, insbesondere aus Formel (13) folgen leicht die nachstehenden beiden Sätze:

Satz 21. *Gilt das Endlichkeitsaxiom* a) *oder* b) *in* $\mathfrak{R}$, *so gilt es auch in* $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$. $\bar{\mathfrak{p}}$ *ist dann und nur dann Primideal in* $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$, *wenn* $\mathfrak{p}^*$ *Primideal in* $\mathfrak{R}$ *ist.*

Satz 22. *Es seien in* $\mathfrak{R}$, *also auch in* $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}$, *die Endlichkeitsaxiome* a) *und* b) *erfüllt. Sind dann* $\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_n$ *die rechts zu* $\bar{\mathfrak{a}}$ *gehörigen Primideale, so gehören zu* $\mathfrak{a}^*$ *gerade rechts die Primideale* $\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}_2^*, \ldots, \mathfrak{p}_n^*$ *und umgekehrt. Ist ferner* $\bar{\mathfrak{i}} = \bar{\mathfrak{i}}_{\bar{\mathfrak{b}}_1 | \bar{\mathfrak{b}}_2 | \ldots | \bar{\mathfrak{b}}_m}$ *rechtes v. i. K. I. von* $\bar{\mathfrak{a}}$, *so ist* $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{i}^*_{\mathfrak{b}_1^* | \mathfrak{b}_2^* | \ldots \mathfrak{b}_m^*}$ *rechtes v. i. K. I. von* $\mathfrak{a}^*$ *und umgekehrt.*

Satz 22 zeigt, daß man zum Studium des Aufbaues von $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{R}$ nur den Aufbau von $\overline{\mathfrak{m}}$ in $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}$ zu untersuchen braucht. Man hat dabei den Vorteil, daß $\overline{\mathfrak{m}}$ in $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}$ die Rolle des Nullideals spielt.

§ 7.

Teilerfremde Ideale.

In § 7 und § 8 betrachten wir nur solche Idealbereiche, die außer den Axiomen der Gruppen I und II von § 1 noch der folgenden Forderung genügen:

Zusatzaxiom zur Gruppe II. *Für beliebiges* $\mathfrak{a}$ *ist stets* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{o} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

Definition 11. *Die Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *heißen „teilerfremd“, wenn* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ *ist.*

Für teilerfremde Ideale gelten folgende Formeln:

(14) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{m}$, wenn $\mathfrak{l}_1 \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{l}_2 \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{l}_3 \equiv \mathfrak{m}$; $\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{m} = \mathfrak{l}_2 + \mathfrak{m} = \mathfrak{l}_3 + \mathfrak{m} = \mathfrak{o}$,[17])

(15) $$\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_m + \mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{b}_n = \mathfrak{o}, \text{ wenn } \mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{o} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

(16) $$\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_1, \text{ wenn } \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}.$$

Was Formel (14) betrifft, so folgt aus $\mathfrak{l}_1 \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{l}_2 \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{l}_3 \equiv \mathfrak{m}$ der Reihe nach:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{l}_2 \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{l}_3 = \mathfrak{l}_1 \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{l}_2 \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{l}_3 + \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{l}_2 \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{l}_3 \equiv \mathfrak{m};$$

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{l}_3 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{l}_2 \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{l}_3 + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{l}_3 \equiv \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{l}_3 + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m}.$$

— Zum Beweis von (15) vgl. K. II § 6, S. 61. — In (16) ist offenbar $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$; ferner haben wir $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{a}_2 + (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_1$. Als Verallgemeinerung von Formel (16) sei hervorgehoben:

(17) $$\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_n \cdot \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_{n-1} + \mathfrak{a}_{n-1} \cdot \mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_{n-2} \cdot \mathfrak{a}_n + \ldots + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_n + \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_n,$$
$$\text{wenn } \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_k = \mathfrak{o} \quad (i \neq k).$$

---

[17]) Aus Formel (14) ergibt sich insbesondere: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$; $\mathfrak{a}^{-1} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$.

Der Beweis ergibt sich analog dem von Formel (16) aus der leicht einzusehenden Tatsache, daß $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_{n-1} + \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_{n-2} \cdot \mathfrak{a}_n + \ldots + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$, wenn $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_k = \mathfrak{o}$ $(i \neq k)$. Im kommutativen Fall reduzieren sich (16) und (17) auf:

(17a) $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_n$, wenn $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_k = \mathfrak{o}$ $(i \neq k)$.

Es sind nun zwei fürs Folgende wichtige Vertauschbarkeitssätze herzuleiten.

Satz 23. *Gilt in* $\mathfrak{R}$ *die Gleichung* $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$; $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{o}$, *so ist für beliebiges* $\mathfrak{a}$ *stets* $\mathfrak{m}_i \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}_i = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}_i$ $(i = 1, 2)$.

Wir haben $\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 \geqq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{n} \geqq \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2$, d. h. $\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{n}$ und ebenso $\mathfrak{m}_2 \cdot \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{n}$; weiter ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}_i \geqq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}_i$; $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}_i = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}_i) \cdot (\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}_i) \cdot \mathfrak{m}_i \geqq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}_i$, also $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}_i = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}_i$ und ebenso $\mathfrak{m}_i \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}_i$.

Wir könnten nun den Begriff der „*direkten Summenzerlegung*“ eines Idealbereichs $\mathfrak{R}$ einführen und mit Hilfe von Satz 23 leicht zeigen, daß jeder direkten Summenzerlegung von $\mathfrak{R}$ eindeutig umkehrbar eine kleinste gemeinschaftliche Vielfachendarstellung des Nullideals durch paarweise teilerfremde Komponenten entspricht. Auf Grund dieses Zusammenhangs ließe sich dann weiter beweisen, daß in einem Idealbereich, der dem Endlichkeitsaxiom a) genügt, *jedes Ideal eindeutig als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von endlich vielen paarweise teilerfremden, teilerfremd irreduziblen Komponenten darstellbar ist.* Doch soll von der Behandlung dieser Probleme abgesehen werden, da sie für unsere nächsten Untersuchungen entbehrlich sind und da sich die nötigen Beweise im wesentlichen bereits an anderer Stelle in der Literatur finden[18]).

Satz 24. *Sind die teilerfremden Ideale* $\mathfrak{m}_1$ *und* $\mathfrak{m}_2$ *vertauschbar, so ist auch jeder Teiler* $\mathfrak{t}_1$ *von* $\mathfrak{m}_1$ *mit jedem Teiler* $\mathfrak{t}_2$ *von* $\mathfrak{m}_2$ *vertauschbar.*

Es genügt offenbar, den Satz für $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{m}_2$ zu beweisen. Nach Formel (16) bzw. (17a) ist $\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_2 \cdot \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$, und aus Satz 23 folgt durch Übergang zum Restklassenbereich $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2}$: $\bar{\mathfrak{t}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{t}}_2 = \bar{\mathfrak{t}}_2 \cdot \bar{\mathfrak{t}}_1$ in $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2}$. Daraus ergibt sich aber $\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2 + (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2) = \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{t}_1 + (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2) = \mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{m}_2 \cdot \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{t}_1$.

---

[18]) Als Vorbild für den Beweis der angedeuteten Sätze in unserm abstrakten Fall können z. B. die Untersuchungen von §§ 3–5 und § 7 von N.-S. dienen. Vgl. insbesondere § 7! Der dort auf S. 18 für den kommutativen Fall angegebene Eindeutigkeitsbeweis läßt sich sofort auf beliebige zweiseitige Idealbereiche übertragen. (Daß in unserm Fall an Stelle der Addition der Elemente die größte – gemeinsame – Teilerbildung der Ideale zu treten hat, ändert an den zu verwendenden Schlüssen nur wenig.) — Auch der Beweis der entsprechenden Sätze aus der Theorie der hyperkomplexen Systeme kann mit Nutzen herangezogen werden. Vgl. z. B. W. § 3; Di. Chapter III § 24 (Reduzibilität = direkte Zerlegbarkeit!)

§ 8.

Die Bereiche $\mathfrak{R}^*$.

Definition 12. *Unter $\mathfrak{R}^*$ verstehen wir stets einen Idealbereich, der außer den Axiomen von § 1 und dem Zusatzaxiom noch der folgenden Forderung genügt, die eine Verschärfung von Endlichkeitsaxiom* b) *darstellt.*

Endlichkeitsaxiom c). *Kein Primideal besitzt einen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler.*

Satz 25. *In $\mathfrak{R}^*$ ist jeder Primidealteiler $\mathfrak{p}$*[19]) *höchstes Primideal von $\mathfrak{a}$. Es gibt nur endlich viel verschiedene Primidealteiler eines festen Ideals. Zwei Ideale sind teilerfremd, wenn sie kein höchstes Primideal gemein haben.*

Beweis trivial. Satz 25 zeigt, daß in $\mathfrak{R}^*$ der Endlichkeitssatz 7 selbstverständlich ist, der in § 3 gegebene komplizierte, aber im allgemeinen Fall unumgängliche Beweis wird also hier überflüssig. Ebenso vereinfacht sich der Beweis von Satz 11 für $\mathfrak{R}^*$.

Satz 26. *In $\mathfrak{R}^*$*[20]) *sind zwei teilerfremde Ideale $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ dann und nur dann vertauschbar, wenn jedes höchste Primideal von $\mathfrak{a}_1$ mit jedem höchsten Primideal von $\mathfrak{a}_2$ vertauschbar ist.*

Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung folgt aus Satz 24. Zum Beweis der Umkehrung ist zu zeigen, daß unter der Voraussetzung von Satz 27 $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ wird.

Es sei $\mathfrak{r}_i$ das (in irgendeiner Reihenfolge genommene) Produkt der höchsten Primideale von $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2)$. Aus Formel (15) bzw. Satz 1 von § 1 bzw. unsrer Voraussetzung folgt $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{o}$; $\mathfrak{r}_1^r \cdot \mathfrak{r}_2^r = \mathfrak{r}_2^r \cdot \mathfrak{r}_1^r \geqq \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$ (für großes r). Setzen wir daher $\mathfrak{i}_k = \mathfrak{i}_{\mathfrak{r}_k}^{(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2)}$ $(k = 1, 2)$, so wird $\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2 = \mathfrak{i}_{\mathfrak{o}}^{(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2)} = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$; $\mathfrak{i}_1 \leqq \mathfrak{r}_2^r$, $\mathfrak{i}_2 \leqq \mathfrak{r}_1^r$; $\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2 = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{i}_2 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}$. Aus den letzteren Gleichungen folgt aber durch mehrfache Anwendung von Formel (14) mühelos $\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{i}_2 = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$, und ganz analog ergibt sich $\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$.

Satz 26 kann noch folgendermaßen verschärft werden:

Satz 27. *Sind die beliebigen Ideale $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ vertauschbar, so ist jeder zu $\mathfrak{a}_2$ teilerfremde Primidealteiler $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{a}_1$ mit jedem zu $\mathfrak{a}_1$ teilerfremden Primidealteiler $\mathfrak{p}_2$ von $\mathfrak{a}_2$ vertauschbar.*

Aus $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_1 \geqq \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$ läßt sich eine Beziehung

$$\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{r}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{r}_s \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{r}_{s+1} \cdot \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{r}_{s+2} \cdot \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{r}_{s+t} \cdot \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{r}_{s+t+1} \geqq \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$$

---

[19]) $\mathfrak{p}$ bedeutet im folgenden stets ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal!

[20]) Satz 26 gilt, wie aus dem Beweis unmittelbar zu ersehen, für alle Bereiche, in denen Endlichkeitsaxiom a), also Satz 1 von § 2 erfüllt ist.

$(\mathfrak{r}_i + \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{o})$ herleiten, und daraus folgt nach Formel (14): $\mathfrak{p}_2^s \cdot \mathfrak{p}_1^t \geqq \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$. Diese letztere Relation zieht aber, wie aus den beim Beweise von Satz 26 benutzten Schlüssen zu ersehen, die Gleichung $\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ nach sich, und auf entsprechende Weise ergibt sich $\mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$.

Ein nur durch ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ teilbares Ideal $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{R}^*$ soll als *„zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal“* [21]) bezeichnet werden. Zwei zu verschiedenen Primidealen gehörige Primärideale sind nach Formel (15) stets teilerfremd, da ja jedes Primärideal Teiler einer gewissen Potenz seines zugehörigen Primideals ist.

Satz 28. *In $\mathfrak{R}^*$ läßt sich dann und nur dann jedes Ideal (eindeutig) als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von teilerfremden Primäridealen darstellen, wenn $\mathfrak{R}^*$ halbkommutativ ist.*

Sind $\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_1$ beide als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von Primäridealen darstellbar, so gelten zwei Gleichungen $\mathfrak{p}_2^k \cdot \mathfrak{p}_1^l \geqq \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_1^m \cdot \mathfrak{p}_2^n \geqq \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_1$, und daraus folgt $\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_1$. — Sind umgekehrt die sämtlichen Primidealteiler $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ von $\mathfrak{a}$ untereinander vertauschbar, so wird für $\mathfrak{r}_i = \prod_{k \neq i} \mathfrak{p}_k$ das i. K. I. $\mathfrak{i}_{\mathfrak{r}_i}$ ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal, und es gilt die Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{r}_1} \cap \mathfrak{i}_{\mathfrak{r}_2} \cap \ldots \cap \mathfrak{i}_{\mathfrak{r}_n}$. — Ist schließlich für $\mathfrak{a}$ eine Darstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ bekannt, bei der $\mathfrak{q}_i$ ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal ist $(\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_k)$, und verstehen wir unter $\mathfrak{r}_i$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache sämtlicher von $\mathfrak{p}_i$ verschiedener $\mathfrak{p}_k$, so wird $\mathfrak{q}_i = {}_{\mathfrak{r}_i}\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{r}_i}$; eine Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch teilerfremde Primärideale ist also, wenn überhaupt vorhanden, eindeutig bestimmt.

Satz 29 lehrt, daß in halbkommutativen $\mathfrak{R}^*$ die Verhältnisse nicht wesentlich komplizierter sind als im kommutativen Fall. Der Unterschied zwischen rechten und linken i. K. J. fällt weg (was in allgemeinen halbkommutativen Bereichen nicht bewiesen werden konnte), und jeder Schar von Primidealteilern von $\mathfrak{a}$ entspricht eindeutig umkehrbar ein i. K. J.

Das wichtigste Anwendungsgebiet für die Idealbereiche $\mathfrak{R}^*$ liefern die Systeme hyperkomplexer Größen.

Unter einem *„endlichen hyperkomplexen System“* S mit Einheitselement und dem (kommutativen) Grundkörper K verstehen wir wie üblich [22])

---

[21]) In Bereichen, die den Axiomen von § 1, aber nicht dem Endlichkeitsaxiom c) genügen, werden wir, um den Zusammenhang mit dem Kommutativen zu wahren, das Primärideal zweckmäßig folgendermaßen definieren: $\mathfrak{q}$ heißt zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, wenn es nur ein einziges höchstes Primideal $\mathfrak{p}$ besitzt, das gleichzeitig das einzige rechts und das einzige links zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal darstellt.

[22]) Die der gegebene Definition, die S als Erweiterungsbereich von K auffaßt, paßt natürlich nur für hyperkomplexe Systeme mit Einheitselement. Zur Definition der allgemeinsten endlichen hyperkomplexen Systeme vgl. W. § 1; Di. Chapter I § 4 ((endliche) Algebra = (endliches) hyperkomplexes System!)

einen i. a. nichtkommutativen Ring, der K als Teilbereich enthält und außerdem den folgenden beiden Bedingungen genügt:

1. Das Einheitselement in K ist auch Einheitselement in S. Jedes Element aus S ist mit jedem Element aus K vertauschbar.

2. S besitzt hinsichtlich K eine endliche Modulbasis, d. h. es lassen sich sämtliche Elemente aus S in der Form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$ darstellen, wobei die a_i beliebige Elemente aus K, die α_i *feste* Elemente aus S bedeuten.

Die Gesamtheit der zweiseitigen Ideale [23]), die man aus den Elementen von S ableiten kann, bildet einen Bereich $\mathfrak{R}$, der ersichtlich den Axiomen der Gruppen I und II von § 1 sowie dem Zusatzaxiom und dem Dedekindschen Modulaxiom genügt. Außerdem folgt aus der Existenz der endlichen Modulbasis von S hinsichtlich K, daß in $\mathfrak{R}$ nicht nur jede Quotientenkette, sondern jede Teilerkette und darüber hinaus auch jede Vielfachenkette im Endlichen abbricht. Daß schließlich in $\mathfrak{R}$ das Endlichkeitsaxiom c) gilt, daß also $\mathfrak{R}$ *einen* $\mathfrak{R}^*$ *darstellt*, ist ein tiefer liegender, wichtiger Satz aus der allgemeinen Theorie der hyperkomplexen Systeme [24]). *Von wesentlicher Bedeutung ist die Tatsache, daß der zu einem hyperkomplexen System S gehörige $\mathfrak{R}^*$ durchaus nicht etwa immer kommutativ oder halbkommutativ ist.*

Das einfachste hierher gehörige Beispiel ist das folgende, auf das mich E. Noether aufmerksam machte: S besitzt als Grundkörper K den Körper der rationalen Zahlen, und als Modulbasis hinsichtlich K drei Elemente e_1, $e_2 = 1 - e_1$, n, mit der Multiplikationstabelle:

---

[23]) Die zweiseitigen Ideale heißen in der Theorie der hyperkomplexen Systeme gewöhnlich „invariante" Untersysteme. Vgl. W. § 2; Di. Chapter III § 20.

[24]) Die Gültigkeit des Endlichkeitsaxioms c) für $\mathfrak{R}$ ergibt sich folgendermaßen: S heißt „halbeinfach", wenn in $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{a}^r = \mathfrak{n}$ stets $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}$ folgt. Ein halbeinfaches System ist direkt zerlegbar („reduzibel") in „einfache" Systeme, deren zugehöriger Idealbereich nur aus Einheits- und Nullideal besteht. Ist S daher halbeinfach, so gilt in $\mathfrak{R}$ sicher Endlichkeitsaxiom c). Bei einem beliebigen hyperkomplexen System S verstehen wir unter $\mathfrak{m}$ den größten gemeinschaftlichen Teiler aller der Ideale, die einer Gleichung $\mathfrak{a}^r = \mathfrak{n}$ genügen. $\mathfrak{m}$ ist durch alle Primideale aus $\mathfrak{R}$ teilbar, es entsprechen daher nach den Ergebnissen von § 6 die Primideale aus $\mathfrak{R}$ eindeutig umkehrbar den Primidealen aus $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$, und es gilt das Endlichkeitsaxiom c) in $\mathfrak{R}$, wenn es in $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$ erfüllt ist. Das letztere ist aber in der Tat der Fall, denn es stellt $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$ den Idealbereich dar, der zu dem halbeinfachen Restklassensystem von S nach $\mathfrak{m}$ gehört. — Zu den Begriffen einfach, halbeinfach, reduzibel, sowie zu den benutzten Sätzen aus der Theorie der hyperkomplexen Systeme vgl. W. § 2 S. 81, § 5 Satz 16 S. 91, Satz 17 S. 94; Di. Chapter IV, insbesondere § 38; vgl. ferner die in der ersten Anm. zitierte Artinsche Arbeit S. 255f.

1	e_1	e_2	n
e_1	e_1	0	n
e_2	0	e_2	0
n	0	n	0

In dem zu S gehörigen $\mathfrak{R}^*$ gibt es im ganzen 5 zweiseitige Ideale, nämlich $\mathfrak{o}=(e_1, e_2, n)$; $\mathfrak{p}_1=(e_1, n)$, $\mathfrak{p}_2=(e_2, n)$; $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2=(n)$; $\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1=\mathfrak{n}=(0)$. Die Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ sind nicht vertauschbar, es ist vielmehr $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2$ echter Teiler von $\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1$. Dementsprechend gibt es auch ein Ideal, das sich nicht als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von Primäridealen darstellen läßt, nämlich das Nullideal $\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1$. $\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1$ ist auch dadurch interessant, daß es zwei höchste Primideale besitzt, $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$, aber nur ein rechts bzw. links zugehöriges Primideal, nämlich $\mathfrak{p}_1$ bzw. $\mathfrak{p}_2$.

Zum Schlusse möge noch ein abstrakt, nicht mit Hilfe eines hyperkomplexen Systems definierter Idealbereich betrachtet werden, an dem sich bequem die wichtigen, in § 2—5 festgestellten Abweichungen vom Kommutativen studieren lassen.

$\mathfrak{R}^*$ besteht aus 10 Idealen: $\mathfrak{o}=\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2+\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2\cap\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2=\mathfrak{n}$ mit den durch die Bezeichnung bereits angedeuteten Teilbarkeitsverhältnissen und der Multiplikationsregel $\mathfrak{p}_1^2=\mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_2^2=\mathfrak{p}_2$.

Daß in $\mathfrak{R}^*$ alle oben aufgezählten, im Bereich der zweiseitigen Ideale eines hyperkomplexen Systems gültigen Axiome erfüllt sind, erkennt man durch Durchprobieren der Verknüpfungsregeln an den endlich vielen Idealen. Von besonderem Interesse ist der Aufbau des Nullideals sowie der von $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2$.

Betrachten wir etwa das Ideal $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1$ genauer! $\mathfrak{a}$ besitzt als höchste Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$, als rechts und links zugehöriges Primideal allein $\mathfrak{p}_1$, *es gehört also das höchste Primideal* $\mathfrak{p}_2$ *weder rechts noch links zu* $\mathfrak{a}$. Hingegen gehört $\mathfrak{p}_2$ rechts bzw. links zu dem i. K. I. $i_{\mathfrak{p}_1}$ bzw. ${}_{\mathfrak{p}_1}i$. Die sämtlichen rechten i. K. I. von $\mathfrak{a}$ sind: $\mathfrak{a}=i_{\mathfrak{p}_2}=i_{\mathfrak{o}}$, $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2=i_{\mathfrak{p}_1}$, $\mathfrak{o}=i_{\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2}$. *Außerdem gibt es noch ein rechtes v. i. K. I. von* $\mathfrak{a}$, *das nicht gewöhnliches rechtes i. K. I. ist*, nämlich $\mathfrak{p}_1=i_{\mathfrak{p}_1|\mathfrak{p}_2}$.

Noch etwas komplizierter und deshalb interessanter ist der Aufbau des Nullideals. Z. B. besitzt $\mathfrak{n}$ als rechte i. K. I.: $\mathfrak{n}=i_{\mathfrak{o}}$; $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1=i_{\mathfrak{p}_2}$, $\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2=i_{\mathfrak{p}_1}$; $\mathfrak{o}=i_{\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2}$; und als rechte, verallgemeinerte, aber nicht gewöhnliche i. K. I.: $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2=i_{\mathfrak{p}_2|\mathfrak{p}_1}$; $\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1=i_{\mathfrak{p}_1|\mathfrak{p}_2}$; $\mathfrak{p}_1=i_{\mathfrak{p}_2|\mathfrak{p}_1|\mathfrak{p}_2}$; $\mathfrak{p}_2=i_{\mathfrak{p}_1|\mathfrak{p}_2|\mathfrak{p}_1}$.

Man sieht, es lassen sich an dem verhältnismäßig einfachen Bereich $\mathfrak{R}^*$ alle wesentlichen Abweichungen vom Kommutativen feststellen.

(Eingegangen am 25. März 1927.)

Über die hypergeometrischen Differentialsysteme.

Von

Ludwig Schlesinger in Gießen.

Setzt man in Gaußscher Bezeichnungsweise

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \qquad y_2 = F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x),$$

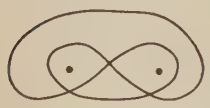
so befriedigen y_1, y_2 ein lineares Differentialsystem von der Form

$$(G) \qquad \begin{aligned} x\frac{dy_1}{dx} &= y_1 a_{11} + y_2 a_{21}, \\ (x-1)\frac{dy_2}{dx} &= y_1 a_{12} + y_2 a_{22} \end{aligned}$$

mit *konstanten* a_{ik}, die sich in einfacher Weise durch die α, β, γ ausdrücken lassen[1]). Die Lösungen des Systems (G) werden nach Euler durch bestimmte Integrale von der Form

$$(E) \qquad \begin{aligned} y_1 &= p_1 \int_L z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}\,dz, \\ y_2 &= p_2 \int_L z^{\alpha-\gamma+1}(z-1)^{\gamma-\beta-2}(z-x)^{-\alpha}\,dz \end{aligned}$$

dargestellt, wo die p_1, p_2 von x unabhängige Größen bedeuten und der Integrationsweg L geeignet zu wählen ist, z. B. als sogenannte Doppelschleife um irgend zwei verschiedene der Punkte 0, 1, x, ∞ (siehe die Figur). — Die einfache Form des Systems (G) legt die Frage nahe, ob es nicht möglich ist, für die allgemeinen zuerst von Pochhammer betrachteten hypergeometrischen Integrale



$$(P) \qquad \int_L (z-a_1)^{r_1} \ldots (z-a_n)^{r_n}(z-x)^{\xi}\,dz$$

Differentialsysteme von ähnlicher Gestalt herzustellen, zumal ja die Differentialgleichung n-ter Ordnung, der die Integrale (P) genügen[2]), recht schwerfällig und unübersichtlich gebaut ist.

[1]) L. Schlesinger, Differentialgleichungen, 3. Aufl. 1922, Nr. 50, S. 208.

[2]) L. Pochhammer, Crelles Journal **71** (1870), S. 316ff., vgl. Ch. Hermite (1876) Oeuvres III, S. 194ff.

§ 1.

Wir gehen aus von einem Differentialsystem mit n Unbekannten

$$(1) \qquad (x-a_k)\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \alpha_{\lambda k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die $\alpha_{\lambda k}$ von x unabhängige Größen bedeuten mögen, und suchen diese so zu bestimmen, daß das System (1) durch Integrale von der Form

$$(2) \qquad y_k = \int_L v_k (z-x)^\xi \, dz$$

befriedigt wird, wo die v_k als Funktionen von z und die Integrationswege L in passender Weise gewählt werden sollen.

Schreiben wir

$$x - a_k = z - a_k - (z - x)$$

und setzen (2) in (1) ein, so ergibt sich

$$(3) \quad -\int_L (z-a_k) v_k \xi (z-x)^{\xi-1} dz + \int_L \left(v_k \xi (z-x)^\xi - \sum_{\lambda=1}^{n} v_\lambda (z-x)^\xi \alpha_{\lambda k}\right) dz = 0.$$

Beachtet man, daß

$$\xi (z-x)^{\xi-1} = \frac{d(z-x)^\xi}{dz}$$

ist und integriert in dem ersten Integral von (3) partiell, so kommt

$$(4) \quad -\left[(z-a_k)(z-x)^\xi v_k\right]_L + \int_L (z-x)^\xi \left\{\frac{d(z-a_k)v_k}{dz} + v_k \xi - \sum_{\lambda=1}^{n} v_\lambda \alpha_{\lambda k}\right\} dz = 0.$$

Wir wollen nun annehmen, daß für von x unabhängige und von Null verschiedene $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Größe

$$(5) \qquad \frac{(z-a_k)v_k}{p_k} = v$$

eine vom Index k unabhängige Funktion von z sei, dann wird die Gleichung (4) sicher befriedigt, wenn

$$(6) \qquad \frac{dv}{dz} = v \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{z-a_\lambda}\left\{\frac{p_\lambda}{p_k}\alpha_{\lambda k} - \delta_{\lambda k}\xi\right\} \qquad \delta_{\lambda k} = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \neq k \\ 1 \text{ für } \lambda = k \end{cases}$$

ist und L so gewählt wird, daß das integralfreie Glied in (4) verschwindet. Setzt man dann

$$(7) \qquad \frac{p_\lambda}{p_k}\alpha_{\lambda k} - \delta_{\lambda k}\xi = r_\lambda,$$

so kann man

$$v = (z-a_1)^{r_1} \ldots (z-a_n)^{r_n}$$

nehmen und erhält für die Integrale (2), also für

$$(8)\qquad \begin{cases} y_1 = p_1 \int\limits_L (z-a_1)^{r_1-1}(z-a_2)^{r_2}\dots(z-a_n)^{r_n}(z-x)^{\xi}\,dz, \\ y_2 = p_2 \int\limits_L (z-a_1)^{r_1}(z-a_2)^{r_2-1}\dots(z-a_n)^{r_n}(z-x)^{\xi}\,dz, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = p_n \int\limits_L (z-a_1)^{r_1}(z-a_2)^{r_2}\dots(z-a_n)^{r_n-1}(z-x)^{\xi}\,dz, \end{cases}$$

wenn L z. B. eine um zwei verschiedene der Punkte $a_1, \dots, a_n, x, \infty$ herumgelegte Doppelschleife bedeutet, das *hypergeometrische Differentialsystem*

$$(9)\qquad \begin{cases} (x-a_1)\frac{dy_1}{dx} = y_1(r_1+\xi) + y_2 r_2 \frac{p_1}{p_2} + \dots + y_n r_n \frac{p_1}{p_n}, \\ (x-a_2)\frac{dy_2}{dx} = y_1 r_1 \frac{p_2}{p_1} + y_2(r_2+\xi) + \dots + y_n r_n \frac{p_2}{p_n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x-a_n)\frac{dy_n}{dx} = y_1 r_1 \frac{p_n}{p_1} + y_2 r_2 \frac{p_n}{p_2} + \dots + y_n(r_n+\xi), \end{cases}$$

das also von der Form (1) mit

$$\alpha_{\lambda k} = (r_\lambda + \delta_{\lambda k}\xi)\frac{p_k}{p_\lambda}$$

ist, und für $n=2$ das Gaußsche Differentialsystem (G) ergibt, wenn man noch $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ setzt. Man sieht, daß für das System (G) die $\alpha_{\lambda k}$ *beliebige* Konstante bedeuten können, aus denen sich dann die Werte der r_1, r_2, ξ und des Verhältnisses $\frac{p_1}{p_2}$ stets bestimmen lassen.

Nimmt man in (8) für L der Reihe nach die Doppelschleifen (a_i, x) um die Punkte a_i und x, für $i = 1, 2, \dots, n$, so erhält man eine Integralmatrix Y des Differentialsystems (9) mit den Elementen

$$(10)\qquad y_{ik} = p_k \int\limits_{(a_i,\,x)} v(z-a_k)^{-1}(z-x)^{\xi}\,dz \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

In bezug auf das Differentialsystem (9) bemerken wir zunächst die folgenden einfachen Tatsachen. Die determinierende Fundamentalgleichung für den im Endlichen gelegenen singulären Punkt a_ν hat die Wurzel $r_\nu + \xi$ und die $(n-1)$-fache Wurzel 0; der letzteren entsprechen in der zu a_ν gehörigen kanonischen Integralmatrix $H^{(\nu)}$ $n-1$ in der Umgebung von a_ν holomorphe Integralsysteme, während das n-te Integralsystem zum Exponenten $r_\nu + \xi$ gehört und die Form

$$(11)\qquad \eta^{\nu}_{nk} = (x-a_\nu)^{r_\nu+\xi}\,\mathfrak{P}^{\nu}_k(x-a_\nu) \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

hat, wo die $\mathfrak{P}^{\nu}_k(x-a_\nu)$ in der Umgebung von a_ν holomorph sind, wenn nicht $r_\nu + \xi$ eine ganze Zahl ist, in welchem Falle Logarithmen auftreten können. Die Elemente dieses Integralsystems (11) stimmen bis auf von x

unabhängige Faktoren mit den Elementen $y_{\nu k}\,(k=1, 2, \ldots, n)$ der Integralmatrix (10) überein. Die zu $x=\infty$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung hat die Wurzel $\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu + \xi$ und die $(n-1)$-fache Wurzel ξ.

Läßt man den Punkt x um den singulären Punkt a_ν einen Umlauf im positiven Sinne vollziehen und bezeichnet durch die vorgesetzte Charakteristik θ_ν dasjenige, was aus einer Funktion von x nach diesem Umlauf geworden ist, so ergeben sich auf bekannte Weise[3]) die *Umlaufsrelationen*

$$\left\{\begin{array}{l} \theta_\nu y_{\nu k} = \varepsilon\varepsilon_\nu y_{\nu k}, \qquad \varepsilon = e^{2\pi i\xi}, \qquad \varepsilon_\nu = \varepsilon^{2\pi i r_\nu}, \\ \text{a)}\ \theta_\nu y_{\lambda k} = y_{\lambda k} - \varepsilon(1-\varepsilon_\lambda)\, y_{\nu k} \\ \text{b)}\ \theta_\nu y_{\lambda k} = y_{\lambda k} - (1-\varepsilon_\lambda)\, y_{\nu k} \end{array}\right\} \lambda \neq \nu, \tag{12}$$

wo je nach der gegenseitigen Lage der Punkte x, a_ν, a_λ die Formeln a) oder b) gelten.

§ 2.

Aus den Umlaufsrelationen (12) kann man zwei Folgerungen ziehen, die für unsere weiteren Betrachtungen von maßgebender Bedeutung sind:

I. Die Formeln (12) bleiben ungeändert, wenn die Größen r_k, ξ um ganze Zahlen vermehrt oder vermindert werden; es gehören folglich alle Differentialsysteme (9), in denen die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dieselben Werte haben, während die entsprechenden r_k, ξ sich um ganze Zahlen unterscheiden, zu derselben *Klasse* im Sinne Riemanns[4]).

II. Da ferner die Koeffizienten der Relationen (12) von den $a_1, a_2, \ldots, a_n$ unabhängig sind, so gilt das gleiche von der Monodromiegruppe, die zu der Integralmatrix Y gehört; nach dem Satze von Fuchs[5]) befriedigt also diese Integralmatrix, wenn man ihre Elemente als Funktionen eines der a_ϱ auffaßt, ebenfalls ein lineares Differentialsystem, dessen Koeffizienten demselben Rationalitätsbereiche angehören, wie die Koeffizienten von (9).

Wir werden diese beiden Ergebnisse *unabhängig von den Relationen* (12) in der Weise herzuleiten suchen, daß wir die in I. gedachten Klassenbeziehungen, sowie die nach II. vorhandenen Differentialsysteme explizite aufstellen. Dazu dient die folgende einfache Bemerkung.

Setzt man

$$\int_L (z-a_1)^{r_1} \ldots (z-a_n)^{r_n} (z-x)^{\xi}\, dz = [r_1, r_2, \ldots, r_n, \xi],$$

[3]) Vgl. z. B. L. Schlesinger, Handbuch II, 1, 1897, XII. Abschn., 3. Kap., S. 455 ff.
[4]) Riemanns Werke (1892), S. 380.
[5]) L. Fuchs (1888), Werke III, S. 22.

so gelten die Relationen

$$(13)\quad \begin{cases} [r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \xi] = [r_1+1, r_2-1, r_3, \ldots, r_n, \xi] \\ \qquad\qquad + (a_1 - a_2)\cdot[r_1, r_2-1, r_3, \ldots, r_n, \xi], \\ [r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \xi] = [r_1, r_2-1, r_3, \ldots, r_n, \xi+1] \\ \qquad\qquad + (x - a_2)\cdot[r_1, r_2-1, r_3, \ldots, r_n, \xi] \end{cases}$$

und die analogen, die man erhält, indem man statt mit a_1, a_2 bzw. mit a_2, x, mit a_i, a_k bzw. a_k, x operiert. Diese Beziehungen in Verbindung mit den Differentialgleichungen (9) geben die Möglichkeit, jedes

$$[r_1+g_1, r_2+g_2, \ldots, r_n+g_n, \xi+g],$$

wo die $g_1, g_2, \ldots, g_n, g$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, durch n linear unabhängige, z. B. durch $\frac{1}{p_1}y_1, \ldots, \frac{1}{p_n}y_n$ linear homogen mit in den $x, a_1, a_2, \ldots, a_n$ rationalen Koeffizienten auszudrücken, wobei in den Nennern der Koeffizienten nur Produkte aus den Differenzen $x - a_i$, $a_i - a_k$, auftreten können. Damit ist die Bemerkung I. erhärtet. — Man kann hier, statt die Differentialgleichungen (9) zu benutzen, auch die Relation

$$(14)\qquad \frac{\partial}{\partial x}[r_1, r_2, \ldots, r_n, \xi] + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a_k}[r_1, r_2, \ldots, r_n, \xi] = 0$$

anwenden, die sich wie folgt ergibt: Es ist z. B.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1}[r_1-1, r_2, \ldots, r_n, \xi] &= (1-r_1)[r_1-2, r_2, \ldots, r_n, \xi] \\ &= -\int_L \frac{d}{dz}\left[(z-a_1)^{r_1-1}\right](z-a_2)^{r_2}\ldots(z-a_n)^{r_n}(z-x)^{\xi}\,dz, \end{aligned}$$

also, indem man partiell integriert und die für den Integrationsweg L geforderte Eigenschaft (S. 505) beachtet,

$$\frac{\partial}{\partial a_1}[r_1-1, r_2, \ldots, r_n, \xi] = \int_L (z-a_1)^{r_1-1}\frac{d}{dz}\left[(z-a_2)^{r_2}\ldots(z-a_n)^{r_n}(z-a)^{\xi}\right]dz$$

und hieraus folgt, wenn man unter dem Integralzeichen rechter Hand ausdifferentiiert, unmittelbar die Gleichung (14). — Bekanntlich besagt diese Gleichung (14), daß die Integrale $[r_1, r_2, \ldots, r_n, \xi]$ nur von den Differenzen der Größen $x, a_1, a_2, \ldots, a_n$ abhängen. Zufolge dieser Eigenschaft kann man ohne weiteres eines der a_k gleich Null nehmen. Ferner sieht man sofort, daß durch Multiplikation aller $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$ mit einem von z unabhängigen Faktor λ alle Integrale y_k mit $\lambda^{r_1+\ldots+r_n+\xi}$ multipliziert werden, was die Differentialgleichungen (9) ungeändert läßt. Man kann also ein zweites der a_k gleich 1 machen. Wir wählen im folgenden

$a_{n-1}=0$, $a_n=1$, so daß, wenn wir noch der Gleichmäßigkeit wegen $x=a_0$ und $\xi=r_0$ setzen, die y_k als Funktionen der $n-1$ voneinander unabhängigen Veränderlichen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}$ erscheinen. Es lassen sich nun sofort die Derivierten der y_k nach den $a_1, \ldots, a_{n-2}$ und damit die in II. erwähnten Differentialgleichungen herstellen.

Aus der ersten der Gleichungen (13) folgt

$$[r_1-1, r_2, \ldots, r_n, \xi]=[r_1, r_2-1, \ldots, r_n, \xi]+(a_1-a_2)[r_1-1, r_2-1, \ldots, r_n, \xi],$$

also

$$\frac{1}{p_1}y_1=\frac{1}{p_2}y_2-(a_1-a_2)\frac{1}{r_2}\frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{1}{p_1}y_1\right),$$

und analog ergibt sich

$$\frac{1}{p_1}y_1=\frac{1}{p_\lambda}y_\lambda-(a_1-a_\lambda)\frac{1}{r_\lambda}\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\left(\frac{1}{p_1}y_1\right) \qquad (\lambda>1). \tag{15}$$

Nun ist nach der ersten der Differentialgleichungen (9)

$$(x-a_1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_1}{p_1}\right)=\frac{y_1}{p_1}(r_1+\xi)+\frac{y_2}{p_2}r_2+\ldots+\frac{y_n}{p_n}r_n,$$

addiert man hierzu die Gleichungen (15) oder

$$(a_\lambda-a_1)\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\left(\frac{y_1}{p_1}\right)=\frac{y_1}{p_1}r_\lambda-\frac{y_\lambda}{p_\lambda}r_\lambda \qquad (\lambda=2, 3, \ldots, n), \tag{15a}$$

so folgt nach (14)

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{y_1}{p_1}\right)=\frac{y_1}{p_1}\left\{\frac{r_1+\xi}{a_1-x}+\sum_{\lambda=2}^{n}\frac{r_\lambda}{a_1-a_\lambda}\right\}+\sum_{\lambda=2}^{n}\frac{y_\lambda}{p_\lambda}\left\{\frac{r_\lambda}{a_1-x}-\frac{r_\lambda}{a_1-a_\lambda}\right\}, \tag{16}$$

und analog gilt

$$\begin{cases}(a_\lambda-a_k)\dfrac{\partial}{\partial a_\lambda}\left(\dfrac{y_k}{p_k}\right)=\dfrac{y_k}{p_k}r_\lambda-\dfrac{y_\lambda}{p_\lambda}r_\lambda & (k\neq\lambda),\\ \dfrac{\partial}{\partial a_k}\left(\dfrac{y_k}{p_k}\right)=\dfrac{y_k}{p_k}\left\{\dfrac{r_k+\xi}{a_k-x}+\sum\limits_{\lambda\neq k}\dfrac{r_\lambda}{a_k-a_\lambda}\right\}+\sum\limits_{\lambda\neq k}\dfrac{y_\lambda}{p_\lambda}\left\{\dfrac{r_\lambda}{a_k-x}-\dfrac{r_\lambda}{a_k-a_\lambda}\right\}.\end{cases} \tag{17}$$

Wir erhalten also für die $y_1, \ldots, y_n$ als Funktionen der $n-2$ unabhängigen Veränderlichen $a_1, \ldots, a_{n-2}$ die Differentialgleichungen

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y_k}{\partial a_\varrho}=y_k\left(\dfrac{\partial\log p_k}{\partial a_\varrho}+\dfrac{r_\varrho}{a_\varrho-a_k}\right)-y_\varrho\dfrac{p_k}{p_\varrho}\dfrac{r_\varrho}{a_\varrho-a_k},\\ \dfrac{\partial y_\varrho}{\partial a_\varrho}=\sum\limits_{\lambda\neq\varrho}y_\lambda\dfrac{p_\varrho}{p_\lambda}\left(\dfrac{r_\lambda}{a_\varrho-x}-\dfrac{r_\lambda}{a_\varrho-a_\lambda}\right)+y_\varrho\left\{\sum\limits_{\lambda\neq\varrho}\dfrac{r_\lambda}{a_\varrho-a_\lambda}+\dfrac{r_\varrho+\xi}{a_\varrho-x}+\dfrac{\partial\log p_\varrho}{\partial a_\varrho}\right\},\end{cases} \tag{18}$$

wo ϱ die Werte $1, 2, \ldots, n-2$ und k, λ die von ϱ verschiedenen der Werte $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen. Zu diesen Gleichungen (18) tritt noch das Differentialsystem (9) hinzu, das die y_i als Funktionen von $x=a_0$ bestimmt.

Wenn wir die Koeffizienten in den Differentialgleichungen (9) und (18) so bezeichnen, daß diese Differentialgleichungen lauten

$$\frac{\partial y_k}{\partial a_\varrho} + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \Gamma_{\lambda\varrho}^{k} = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ \varrho = 0, 1, \ldots, n-2 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

so folgt aus der Tatsache, daß diese Differentialsysteme simultan durch die Funktionen y_k der $n-1$ unabhängigen Veränderlichen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}$ befriedigt werden, daß zwischen den $n-1$ Matrizen

$$\Gamma_\varrho = (\Gamma_{\lambda\varrho}^{k}) \qquad (\lambda, k = 1, 2, \ldots, n; \quad \varrho = 0, 1, \ldots, n-2) \tag{20}$$

die Integrabilitätsbedingungen

$$R_{\sigma\varrho} = \frac{\partial \Gamma_\varrho}{\partial a_\sigma} - \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial a_\varrho} + \Gamma_\sigma \Gamma_\varrho - \Gamma_\varrho \Gamma_\sigma = 0 \tag{21}$$
$$(\varrho, \sigma = 0, 1, \ldots, n-2; \quad \varrho \neq \sigma)$$

bestehen, was sich auch durch Rechnung leicht bestätigen läßt[6]). Wir können demnach die Differentialgleichungen (19) in das komplett integrierbare totale Differentialsystem

$$dy_k + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\varrho=0}^{n-2} \Gamma_{\lambda\varrho}^{k} \, da_\varrho = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{19a}$$

zusammenfassen. — Denken wir uns dieses System als eine *Parallelverschiebung* des Vektors mit den kontravarianten[7]) Komponenten y_k in der durch die $\Gamma_{\lambda\varrho}^{k}$ (nach Weyl den Komponenten des affinen Zusammenhangs) gegebenen Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen, so besagen die Integrabilitätsbedingungen (21), daß für diese Mannigfaltigkeit der Riemannsche Krümmungstensor

$$R_{\alpha\sigma\varrho}^{\beta} \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n \\ \varrho, \sigma = 0, 1, \ldots, n-2 \end{pmatrix}$$

verschwindet, d. h. daß wir es mit einer Euklidischen oder ebenen Mannigfaltigkeit zu tun haben.

---

[6]) Die Transformationen, die die y_{lk} erfahren, wenn irgendeines der a_ϱ für $\varrho = 1, \ldots, n-2$ eines der a_σ für $\sigma = 0, 1, \ldots, n$ umkreist und die den oben für $\varrho = 0$ angegebenen Relationen (12) analog sind, findet man im Bande 124 des Crelleschen Journals, S. 318 angegeben.

[7]) Entgegen der sonst üblichen Schreibweise schreiben wir hier für die *kontravarianten* Komponenten den Index *unten* und entsprechend in der folgenden Nummer für die *kovarianten* Komponenten *oben*. Vgl. im übrigen meine Note „Parallelverschiebung und Krümmungstensor", Mathematische Annalen 1928.

§ 3.

Ehe wir weitergehen, wollen wir noch die Differentialgleichungen (19a) in die *kovarianten* Vektorkomponenten y^k umschreiben, d. h. das zu (19a) *adjungierte* Differentialsystem herstellen und integrieren. Das geschieht bekanntlich so, daß wir nach Größen y^k fragen, für die

$$\sum_{i=1}^{n} y^i \Big(dy_i + \sum_{\lambda,\varrho} y_\lambda \Gamma^i_{\lambda\varrho}\, da_\varrho \Big)$$

gleich dem totalen Differential eines von $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, y_1, \ldots, y_n$ abhängenden Ausdrucks wird. Durch partielle Integration ergibt sich

$$\int \sum_i y^i \Big(dy_i + \sum_{\lambda,\varrho} y_\lambda \Gamma^i_{\lambda\varrho}\, da_\varrho \Big) = \sum_i \Big[y^i y_i - \int \Big(y_i\, dy^i - y^i \sum_{\lambda,\varrho} \Gamma^i_{\lambda\varrho}\, y_\lambda\, da_\varrho \Big) \Big]$$

$$= \sum_i y^i y_i - \int \sum_i y_i \Big(dy^i - \sum_\varrho da_\varrho \sum_\lambda y^\lambda \Gamma^\lambda_{i\varrho} \Big),$$

und indem wir diese Gleichung differentiieren, finden wir die sogenannte Identität von Lagrange:

$$\sum_i dy^i \Big(dy_i + \sum_{\lambda,\varrho} y_\lambda \Gamma^i_{\lambda\varrho}\, da_\varrho \Big) + \sum_i dy_i \Big(dy^i - \sum_{\lambda,\varrho} y^\lambda \Gamma^\lambda_{i\varrho}\, da_\varrho \Big) = d \sum_i y^i y_i .$$

Wenn also die y_i dem Differentialsystem (19a) und die y^i dem adjungierten Differentialsystem

$$(19b) \qquad dy^i - \sum_{\lambda=1}^{n} y^\lambda \sum_{\varrho=0}^{n-2} \Gamma^\lambda_{i\varrho}\, da_\varrho = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, so ist das Aggregat $\sum_{i=1}^{n} y^i y_i$ gleich einer von allen Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}$ unabhängigen *Konstanten*. Natürlich ist auch das Differentialsystem (19b) komplett integrabel; um seine Lösungen aufzustellen, genügt es folglich, etwa das Differentialsystem zu betrachten, dem die y^i als Funktionen von $x = a_0$ genügen, d. h. also das zu (9) adjungierte Differentialsystem

$$(22) \qquad \frac{dy^k}{dx} = -\, y^1 \frac{r_k}{x - a_1} \frac{p_1}{p_k} - \ldots - y^k \frac{r_k + \xi}{x - a_k} - \ldots - y^n \frac{r_k}{x - a_n} \frac{p_n}{p_k}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzen wir hierin

$$(23) \qquad y^k = (x - a_k)\,\zeta_k, \qquad \frac{dy^k}{dx} = (x - a_k) \frac{d\zeta_k}{dx} + \zeta_k,$$

so ergibt sich für die ζ_k das Differentialsystem

$$(22a) \qquad (x - a_k) \frac{d\zeta_k}{dx} = -\, \zeta_1 r_k \frac{p_1}{p_k} - \ldots - \zeta_k (r_k + \xi + 1) - \ldots - \zeta_n r_k \frac{p_n}{p_k};$$

soll dieses die Form von (9) haben, so müssen die den in (9) auftretenden Größen r_k, ξ, p_k entsprechenden Größen ϱ_k, η, π_k so bestimmt werden, daß

$$-\frac{p_\lambda}{p_k}(r_k+\delta_{\lambda k}(\xi+1))=(\varrho_\lambda+\delta_{\lambda k}\eta)\frac{\pi_k}{\pi_\lambda} \tag{24}$$

wird. Das ergibt

für $k=\lambda$, $\varrho_k=-r_k$, $\eta=-\xi-1$ und für $k\neq\lambda$, $\pi_k=\frac{r_k}{p_k}$.

Hiernach wird also das System (22) durch die Ausdrücke

$$\left\{\begin{aligned}
y^1&=\frac{(x-a_1)^{r_1}}{p_1}\int_L(z-a_1)^{-r_1-1}(z-a_2)^{-r_2}\dots(z-a_n)^{-r_n}(z-x)^{-\xi-1}dz,\\
y^2&=\frac{(x-a_2)^{r_2}}{p_2}\int_L(z-a_1)^{-r_1}(z-a_2)^{-r_2-1}\dots(z-a_n)^{-r_n}(z-x)^{-\xi-1}dz,\\
&\dots\dots\dots

§ 4.

Wir greifen auf die Integrabilitätsbedingungen (21) zurück. Wie bekannt[9]), lassen sich diese in ein System von Differentialgleichungen zweiten Grades für die Residuen der $\Gamma_{\lambda 0}^{k}$ in bezug auf die Pole $a_1, \ldots, a_n$ umgestalten, das durch eine Transformation der y_k auf eine besonders einfache Form gebracht werden kann[10]). In dem Falle der hypergeometrischen Differentialsysteme lassen sich die hierzu erforderlichen Rechnungen in übersichtlichster Weise durchführen und liefern ein einfach gebautes Lösungssystem jenes Differentialsystems zweiten Grades[11]).

Es sei

$$-\Gamma_{\lambda 0}^{k} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\mathfrak{r}_{\lambda k}^{\nu}}{a_0 - a_\nu}, \tag{26}$$

oder kürzer in Matrizenform

$$-\Gamma_0 = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\mathfrak{R}^{\nu}}{a_0 - a_\nu}, \tag{26a}$$

dann ist nach der allgemeinen Theorie

$$-\Gamma_\varrho = \frac{\mathfrak{R}^{\varrho}}{a_\varrho - a_0} + P_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n-2), \tag{27}$$

wo P_ϱ von $a_0 = x$ unabhängig ist; in der Tat haben wir in unserem Falle

$$P_\varrho = \begin{pmatrix} \frac{\partial \log p_1}{\partial a_\varrho} + \frac{r_\varrho}{a_\varrho - a_1} & \cdots & -\frac{p_\varrho}{p_1}\frac{r_1}{a_\varrho - a_1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{p_1}{p_\varrho}\frac{r_\varrho}{a_\varrho - a_1} & \cdots & \frac{\partial \log p_\varrho}{\partial a_\varrho} + \sum_{\lambda \neq \varrho} \frac{r_\lambda}{a_\varrho - a_\lambda} & \cdots & -\frac{p_n}{p_\varrho}\frac{r_\varrho}{a_\varrho - a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -\frac{p_\varrho}{p_1}\frac{r_n}{a_\varrho - a_1} & \cdots & \frac{\partial \log p_n}{\partial a_\varrho} + \frac{r_\varrho}{a_\varrho - a_n} \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich nun darum, durch eine Transformation der y_k die P_ϱ zum Verschwinden zu bringen; dies wird[10]) erreicht, wenn wir setzen

$$y_k = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda c_{\lambda k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{29}$$

---

[9]) L. Schlesinger, Crelles Journal **129** (1905), S. 294.

[10]) L. Schlesinger, Atti del IV. Congresso intern. Vol. II, Roma 1909, S. 66, 67.

[11]) Eine allgemeine Theorie dieses Differentialsystems hat R. Garnier in Angriff genommen, Rendiconti Circ. Mat. Palermo **43** (1919), S. 155 ff.; Annales de l'École Normale (3) **43** (1926), S. 177 ff. Im vierten Teile der letztgenannten Abhandlung, der mir erst während der Drucklegung der vorliegenden Note zu Gesicht gekommen ist, beschäftigt sich Garnier (S. 279 ff.) mit einem hypergeometrischen Differentialsystem von einer unserem System (18) oben S. 509 ähnlichen Form.

und die c_{ik} so bestimmen, daß sie den Differentialsystemen

$$\frac{\partial c_k}{\partial a_\varrho} = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda P_{\lambda\varrho}^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \varrho = 1, 2, \ldots, n-2). \tag{30}$$

Genüge leisten. In expliziter Form geschrieben lauten diese Systeme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a_\varrho}\left(\dfrac{c_k}{p_k}\right) = \dfrac{c_k}{p_k}\dfrac{r_\varrho}{a_\varrho - a_k} - \dfrac{c_\varrho}{p_\varrho}\dfrac{r_\varrho}{a_\varrho - a_k} & (k \neq \varrho), \\ \dfrac{\partial}{\partial a_\varrho}\left(\dfrac{c_\varrho}{p_\varrho}\right) = -\dfrac{c_1}{p_1}\dfrac{r_1}{a_\varrho - a_1} - \ldots + \dfrac{c_\varrho}{p_\varrho}\sum_{\lambda \neq \varrho}\dfrac{r_\lambda}{a_\varrho - a_\lambda} - \ldots - \dfrac{c_n}{p_n}\dfrac{r_n}{a_\varrho - a_n}. \end{cases} \tag{30a}$$

Daß sie miteinander verträglich, d. h. also, daß die Integrabilitätsbedingungen für ihre Koeffizienten erfüllt sind, folgt einfach daraus, daß ja nach Gleichung (27)

$$-P_\varrho = \lim_{x \to \infty} \Gamma_\varrho \tag{31}$$

ist und daß für die Γ_ϱ die Integrabilitätsbedingungen (21) bestehen; wir können also die simultanen Systeme (30) in das eine totale und total integrierbare Differentialsystem

$$dc_k = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda \sum_{\varrho=1}^{n-2} P_{\lambda\varrho}^k \, da_\varrho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{30b}$$

zusammenfassen. — Multipliziert man die k-te Gleichung von (30b) mit r_k und addiert, so erhält man mit Rücksicht auf die besondere Form (28) der Koeffizienten $P_{\lambda\varrho}^k$

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \, d\left(\frac{c_k}{p_k}\right) = 0,$$

also

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \frac{c_k}{p_k} = \text{konst.}, \tag{32}$$

wo die Konstante eine von *allen* a_ϱ ($\varrho = 0, 1, \ldots, n-2$) unabhängige Größe bedeutet. Aus (32) folgt, daß das System (30b) *reduzibel* ist; auf Grund dieser Eigenschaft werden wir die Integration von (30b) explizite durchführen können. Wir brauchen uns zu diesem Zweck nur mit *einem bestimmten* der Systeme (30a) zu beschäftigen.

Nach (32) ist für ein bestimmtes ϱ

$$r_\varrho \frac{c_\varrho}{p_\varrho} = -\sum_{\lambda \neq \varrho} r_\lambda \frac{c_\lambda}{p_\lambda} + \text{konst.},$$

also lautet die k-te Gleichung von (30a) für $k \neq \varrho$

$$\frac{\partial}{\partial a_\varrho}\left(\frac{c_k}{p_k}\right) = \frac{c_1}{p_1}\frac{r_1}{a_\varrho - a_k} + \ldots + \frac{c_k}{p_k}\frac{r_k + r_\varrho}{a_\varrho - a_k} + \ldots + \frac{c_n}{p_n}\frac{r_n}{a_\varrho - a_k} + \frac{\text{konst.}}{a_\varrho - a_k}; \tag{33}$$

wir erhalten somit, wenn wir die Konstante der Gleichung (32) gleich Null wählen, für die $\frac{c_k}{p_k}$, $k \neq \varrho$, ein Differentialsystem, das dieselbe Form hat wie das System (9), und wo nur

an Stelle von n gesetzt ist $n-1$,
" " " x " " a_ϱ,
" " " r_k " " r_k für $k \neq \varrho$,
" " " ξ " " r_ϱ,
" " " p_i " " 1.

Hiernach finden wir also die Ausdrücke

$$\frac{c_k}{p_k} = \int_{L'} (z-a_1)^{r_1} \dots (z-a_k)^{r_k-1} \dots (z-a_n)^{r_n} dz \qquad (k \neq \varrho), \tag{34}$$

wo L' ein passend zu wählender Integrationsweg ist, ein Ergebnis, das auch schon darum zu erwarten war, weil ja die Systeme (30) aus (19) durch den Grenzübergang $x \to \infty$ hervorgehen.

Um die Ausdrücke (34) zu einem Integralsystem von (30a) zu ergänzen, bedarf es noch des zugehörigen c_ϱ; dieses wird aber sofort durch die Relation (32) geliefert, wo die Konstante gleich Null zu nehmen ist. Man kann jedoch dieses c_ϱ auch durch die folgende kleine Rechnung in einer zu (34) analogen Form gewinnen. Die Gleichungen (30a) liefern z. B., wenn wir $\varrho > 1$ voraussetzen, für $k = 1$

$$r_\varrho \frac{c_\varrho}{p_\varrho} = -(a_\varrho - a_1) \frac{\partial}{\partial a_\varrho}\left(\frac{c_1}{p_1}\right) + r_\varrho \frac{c_1}{p_1},$$

also, indem wir für c_1 seinen Wert aus (34) einsetzen,

$$r_\varrho \frac{c_\varrho}{p_\varrho} = (a_\varrho - a_1)\, r_\varrho \int_{L'} (z-a_1)^{r_1-1} \dots (z-a_\varrho)^{r_\varrho-1} \dots (z-a_n)^{r_n} dz$$
$$+ r_\varrho \int_{L'} (z-a_1)^{r_1-1} \dots (z-a_\varrho)^{r_\varrho} \dots (z-a_n)^{r_n} dz$$

und hiernach

$$\frac{c_\varrho}{p_\varrho} = \int_{L'} (z-a_1)^{r_1} \dots (z-a_\varrho)^{r_\varrho-1} \dots (z-a_n)^{r_n} dz. \tag{34a}$$

Daß dieser Ausdruck für c_ϱ mit den durch (34) gegebenen c_k in der Tat die Relation (32) mit konst. $= 0$ erfüllt, erkennt man, wenn man beachtet, daß ja gemäß (34) und (34a)

$$\frac{r_k}{p_k} c_k = -\frac{\partial}{\partial a_k} \int_{L'} (z-a_1)^{r_1} \dots (z-a_n)^{r_n} dz \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ist, und daß das Integral rechter Hand offenbar die Relation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a_k} \int_{L'} (z-a_1)^{r_1} \dots (z-a_n)^{r_n} dz = 0$$

befriedigt. Als Integrationsweg L' stehen uns $n-1$ unabhängige Doppelschleifen zur Verfügung; wir wählen etwa die um je einen der Punkte $a_1, \dots, a_{n-1}$ und um $a_n = 1$ herumgelegten Doppelschleifen (a_i, a_n). Dann bilden

$$c_{ik} = p_k \int_{(a_i, a_n)} (z-a_1)^{r_1} \dots (z-a_k)^{r_k-1} \dots (z-a_n)^{r_n} dz \tag{35}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1;\ k = 1, 2, \dots, n)$$

$n-1$ linearunabhängige Integralsysteme von (30a) und auch von (30b), und wenn wir diesen noch das Integralsystem

$$c_{nk} = p_k \tag{35a}$$

als n-tes hinzufügen, so haben wir eine Integralmatrix C von (30b) hergestellt.

Um die zu Beginn dieses Paragraphen in Aussicht genommene Transformation der y_k durchführen zu können, bedürfen wir noch der zu C inversen Matrix. Diese ist aber bekanntlich die Transponierte der zu C adjungierten Integralmatrix $\mathfrak{C}$, die sich wie folgt ergibt.

Das zu dem System (30) adjungierte Differentialsystem

$$\frac{\partial c^k}{\partial a_\varrho} = -\sum_{\lambda=1}^{n} c^\lambda P_{k\varrho}^{\lambda} \tag{36}$$

hat, wenn wir es für die Größen $\frac{c^k p_k}{r_k}$ schreiben, dieselbe Form wie (30a), nur ist an die Stelle von r_k zu setzen $-r_k$ und an die Stelle von p_k, $\frac{r_k}{p_k}$; hiernach haben wir in

$$c_i^k = \frac{r_k}{p_k} \int_{(a_i, a_n)} (z-a_1)^{-r_1} \dots (z-a_k)^{-r_k-1} \dots (z-a_n)^{-r_n} dz \tag{37}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1;\ k = 1, 2, \dots, n),$$

$$c_n^k = \frac{r_k}{p_k} \tag{37a}$$

eine Integralmatrix von (36) und auch des zu (30b) adjungierten totalen Differentialsystems. Um jetzt noch die zu C adjungierte Integralmatrix $\mathfrak{C}$ herzustellen, haben wir die $\varepsilon_{\lambda\nu}$ so zu bestimmen, daß für

$$c_\lambda^k = \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_{\lambda\nu} c_\nu^k \tag{38}$$

die Relationen[12])

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, c_{\lambda}^{k} = \delta_{i\lambda} \tag{39}$$

gelten; nun ist nach § 3

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, c_{\lambda}^{k} = \gamma_{i\lambda} \qquad (i, \lambda = 1, 2; \ldots, n)$$

von allen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ unabhängig, also hat man nach Kenntnis dieser absoluten Konstanten nur noch das System linearer Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_{\lambda\nu}\, \gamma_{i\nu} = \delta_{\lambda i}$$

aufzulösen. Die Elemente der Matrix C^{-1} sind dann in der Form

$$\bar{c}_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_{k\nu}\, c_{\nu}^{i} \tag{40}$$

gegeben.

§ 5.

Die Transformation (29), die wir für die Integralmatrix Y in der Form

$$Y = ZC \tag{29a}$$

schreiben, verwandelt das Differentialsystem (9) oder

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\Gamma_0 = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial Z}{\partial x} + ZC\Gamma_0 C^{-1} = 0,$$

und die Differentialsysteme (19) oder

$$\frac{\partial Y}{\partial a_\varrho} + Y\Gamma_\varrho = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial Z}{\partial a_\varrho} + Z\left(\frac{\partial C}{\partial a_\varrho} C^{-1} + C\Gamma_\varrho C^{-1}\right) = 0$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Da aber C eine Integralmatrix des Differentialsystems (30a) bedeutet, so gilt (vgl. Gleichung (30))

$$\frac{\partial C}{\partial a_\varrho} + CP_\varrho = 0,$$

wir können also die für Z geltenden Differentialsysteme mit Rücksicht auf die Darstellungen (26a) und (27) der Matrizen Γ_0 und Γ_ϱ in der Form

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = Z \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{C\mathfrak{R}^{\lambda} C^{-1}}{x - a_\lambda}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial a_\varrho} = Z\, \frac{C\mathfrak{R}^{\varrho} C^{-1}}{a_\varrho - x} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n-2) \tag{41}$$

schreiben. Setzen wir noch

$$C\mathfrak{R}^{\varrho} C^{-1} = R^{\varrho} = (r_{ik}^{\varrho}), \tag{42}$$

---

[12]) Vgl. etwa L. Schlesinger, Vorlesungen, 1908, S. 35, Gl. (6).

so liefern[13]) die Integrabilitätsbedingungen für die simultanen Systeme (41) das oben gedachte Differentialsystem zweiten Grades in seiner einfachen Gestalt

$$(R)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r_{ik}^{\nu}}{\partial a_\varrho} = \dfrac{\sum_{\lambda=1}^{n} \left(r_{i\lambda}^{\varrho} r_{\lambda k}^{\nu} - r_{i\lambda}^{\nu} r_{\lambda k}^{\varrho}\right)}{a_\nu - a_\varrho}, \quad \nu \neq \varrho \quad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n-2 \\ i, k, \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}, \\ \dfrac{\partial}{\partial a_\varrho} \sum_{\nu=1}^{n} r_{ik}^{\nu} = 0 \end{cases}$$

und wir können nunmehr für dieses Differentialsystem das folgende partikuläre Lösungssystem angeben.

Die durch die Gleichungen (26) erklärten Residuen $\mathfrak{r}_{ik}^{\nu}$ haben, wie die hypergeometrischen Differentialgleichungen (9) zeigen, die Werte

$$\mathfrak{r}_{ik}^{\nu} = 0 \quad \text{für} \quad k \neq \nu, \qquad \mathfrak{r}_{i\nu}^{\nu} = r_i \frac{p_\nu}{p_i} + \delta_{i\nu}\xi,$$

also ist nach (42)

$$\begin{aligned} r_{ik}^{\nu} &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} c_{i\lambda} \mathfrak{r}_{\lambda\mu}^{\nu} \bar{c}_{k\mu} = \sum_{\lambda} c_{i\lambda} \left(r_\lambda \frac{p_\nu}{p_\lambda} + \delta_{\lambda\nu}\xi\right) \bar{c}_{k\nu} \\ &= p_\nu \sum_{\lambda} c_{i\lambda} \frac{r_\lambda}{p_\lambda} + c_{i\nu} \bar{c}_{k\nu} \xi. \end{aligned}$$

Die mit p_ν multiplizierte Summe ist nach (32) eine absolute Konstante und zwar hat sie nach den Festsetzungen des § 4 für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ den Wert Null und für $i = n$ den Wert $\sum_{\lambda=1}^{n} r_\lambda$; es ist demnach

$$(43)\qquad r_{ik}^{\nu} = \xi c_{i\nu} \bar{c}_{k\nu} \quad \text{für} \quad i < n, \qquad r_{nk}^{\nu} = p_\nu \sum_{\lambda} r_\lambda + \xi p_\nu \bar{c}_{k\nu}$$
$$(k, \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

und hierin hat man sich für die $c_{i\nu}$ die durch die Ausdrücke (35), für die $\bar{c}_{k\nu}$ die durch die Ausdrücke (36), (36a) in Verbindung mit den Gleichungen (40) gegebenen expliziten Werte gesetzt zu denken.

Gießen, Mathematisches Seminar, den 2. April 1927.

[13]) Siehe etwa L. Schlesinger, Differentialgleichungen, 3. Aufl. 1922, S. 306, 307.

(Eingegangen am 19. April 1927.)

Sulle autosoluzioni e sulle formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte.

Di

Mauro Picone a Napoli.

Nell'intervallo (a, b) dell'asse x siano definite le tre funzioni reali e continue $\theta(x)$, $A(x)$ e $B(x)$, e, p essendo un numero positivo, in quell'intervallo, si abbia

$$\theta(x) \geqq p > 0, \qquad B(x) \leqq 0,$$

$A(x)$ non identicamente nulla. Considerando l'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine, contenente il parametro λ,

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{du}{dx}\right) + (\lambda A(x) + B(x))\, u = 0, \tag{1}$$

è ben noto che [1]:

Esiste una successione illimitata di autovalori di λ:

$$\ldots, \lambda_{-n}, \ldots, \lambda_{-1}, \lambda_{-0}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

$$\ldots < \lambda_{-n} < \ldots < \lambda_{-1} < \lambda_{-0} < 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots,$$

(*costantemente crescente da* $-\infty$ *a* $+\infty$; *riuscendo* $\lambda_{-0} = -\infty$ *se* $A(x)$ *si mantiene non negativa in* (a, b), $\lambda_0 = +\infty$ *se* $A(x)$ *si mantiene non positiva,* λ_{-n} *e* λ_n *finiti, qualunque valore abbia l'indice* n, *se* $A(x)$ *prende valori di segno opposto*) *tali che l'equazione*

[1]) Il teorema, col preciso computo degli zeri delle autosoluzioni, di che sarà tratto un gran profitto nel presente lavoro, è stato stabilito per la prima volta nella mia Tesi d'abilitazione: *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa **11** (1910), pp. 1–141). Una dimostrazione assai semplice ed estremamente breve dello stesso teorema, fondata sopra un'osservazione del Bôcher, ho data nel mio Corso d'Analisi Superiore: Fascicolo I, *Teoria introduttiva delle equazioni differenziali* [Pubblicazioni del Circolo Matematico di Catania (1922), Catania, R. Università].

(1_h) $\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{du}{dx}\right)+(\lambda_h A(x)+B(x))u=0 \qquad (h=\ldots,-1,-0,0,1,\ldots)$

è dotata di un' autosoluzione u_h *(determinata a meno di un fattore costante) verificante le condizioni terminali*

$$(2) \qquad u_h(a)=u_h(b)=0.$$

L' autosoluzione $u_h(x)$*, oltre che in* a *e in* b*, si annulla nell' interno di* (a,b) *precisamente* $|h|$ *volte e* $|h|$ *volte soltanto.*

Nella citata mia Tesi d' abilitazione (loc. cit.[1]) § 5) ho stabilito taluni teoremi di calcolo delle variazioni tra i quali è contenuto il seguente:

I. *Detto* Γ'_h *l' aggregato delle funzioni reali* $y(x)$*, definite nell' intervallo* (a,b)*, ivi assolutamente continue e a numeri derivati finiti di quadrato sommabile, nulle nei punti di* (a,b) *ove si annulla l' autosoluzione* u_h*, l' integrale*

$$(3) \qquad J_h[y]\equiv\int_a^b\left[\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(\lambda_h A+B)y^2\right]dx,$$

ha in Γ'_h *per minimo lo zero che consegue quando e solo quando* $y\equiv\alpha u_h$*,* α *designando una costante. Si ha cioè, per ogni funzione* y *di* Γ'_h*,*

$$\int_a^b\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx-\int_a^b B\,y^2\,dx\geqq\lambda_h\int_a^b A\,y^2\,dx,$$

il segno eguale sussistendo quando e solo quando $y\equiv\alpha u_h$*.*

Nella nota presente applico (al § 2) il teorema ora enunciato alla dimostrazione di una notevole proprietà degli zeri delle autosoluzioni u_h della (1_h), relative alle condizioni terminali (2), che non mi consta sia stata ancora osservata.

Questa proprietà consente un' immediata deduzione (che faccio al § 3 della nota attuale) del seguente teorema dal teorema I:

II. *Detto* Γ''_n (Γ''_{-n}) *l' aggregato delle funzioni reali* $y(x)$ *definite nell' intervallo* (a,b)*, ivi assolutamente continue e a numeri derivati finiti di quadrato sommabile nulle in* a *e in* b *e verificanti le* n *equazioni:*

$$(4_+) \qquad \int_a^b A u_0\,y\,dx=\int_a^b A u_1\,y\,dx=\ldots=\int_a^b A u_{n-1}\,y\,dx=0,$$

$$(4_-) \qquad \left(\int_a^b A u_{-0}\,y\,dx=\int_a^b A u_{-1}\,y\,dx=\ldots=\int_a^b A u_{-n+1}\,y\,dx=0\right)$$

l' integrale (3) *ha in* Γ''_n *(in* Γ''_{-n}*) per minimo lo zero che consegue quando e solo quando* $y\equiv\alpha u_n$ $(y\equiv\alpha u_{-n})$*,* α *designando una costante.*

Adunque il nuovo teorema qui dato (al § 2) per gli zeri delle autosoluzioni u_h della (1_h) mette in relazione le proprietà di minimo delle autosoluzioni stabilite nella citata mia Tesi d'abilitazione con quelle, dovute a Hilbert e alla sua scuola, alle quali ultime appartiene appunto il teor. II, che arreca inoltre, nell'indirizzo hilbertiano, un perfezionamento, forse non ancora esplicitamente osservato, per quanto deva ritenersi implicitamente contenuto, per es., nelle ricerche del 1914 di Lichtenstein [2]) sugli sviluppi in serie nella teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie. Il perfezionamento, che si deve rilevare, consiste nell'affermare che riesce, in $\Gamma''_{\pm n}$,

$$J_{\pm n}[y] = 0$$

quando e solo quando $y \equiv \alpha u_{\pm n}$, α designando una costante. Se si prescinde da tale affermazione, spetta al Mason [3]) il merito di avere enunciato e dimostrato, per il primo, il teor. II, lasciando cadere l'ipotesi della costanza in (a, b) del segno della funzione $A(x)$.

Al § 1 del presente lavoro riespongo la semplicissima ed elementare dimostrazione del teor. I di minimo della mia Tesi d'abilitazione, e così, con quella del nuovo teorema del § 2, il lettore troverà in queste pagine (al § 3) una dimostrazione diretta veramente semplice ed assolutamente elementare della proprietà hilbertiana di minimo enunciata col teor. II.

Al § 4 applico quest'ultimo teorema all'ottenimento di notevoli formule di maggiorazione dell'integrale $y(x)$ dell'equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + A(x)\, y = f(x)$$

obbligato a prendere nei punti terminali a e b dell'intervallo (a, b) valori prescritti, nella sola ipotesi (necessaria per l'esistenza e per l'unicità dell'integrale) che l'unità non si trovi fra gli autovalori di λ nell'equazione:

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{du}{dx}\right) + \lambda A(x)\, u = 0$$

relativi alle condizioni terminali $u(a) = u(b) = 0$. Le formule indicate che però, nelle condizioni più generali, si scrivono soltanto a patto di conoscere valori approssimati per difetto del minimo autovalore maggiore di 1 e approssimati per eccesso del massimo autovalore minore di 1,

---

[2]) L. Lichtenstein, *Zur Analysis der unendlich vielen Variablen, I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **38** (1914), pp. 113–166]; p. 126.

[3]) M. Mason, *On the boundary value problems of linear ordinary differential equations of second order* [Transactions of the American Mathematical Society **7** (1906), pp. 337–369].

hanno il duplice importante ufficio di dare una notevole nozione quantitativa dell' integrale e di consentire la maggiorazione del resto di eventuali serie, costruite al modo di Fourier, approssimanti l' integrale nell' intervallo (a, b), e quindi di dare la maggiorazione dell' errore nei più generali calcoli d' approssimazione lineare dell' integrale.

Al § 5, infine, indico rapidamente le possibili generalizzazioni di cui sono suscettibili i metodi e i risultati del presente lavoro, sia rimanendo nel caso delle equazioni differenziali lineari ordinarie del 2° ordine e generalizzando le condizioni ulteriori imposte all' integrale, sia passando a considerare le equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte d' ordine, necessariamente pari, superiore al secondo, sia, infine, prendendo in considerazione le equazioni integrali di 2ª specie che possono collegarsi — specialmente al modo di Eugenio Elia Levi — coi problemi al contorno relativi alle equazioni differenziali ordinarie o alle derivate parziali. Alla diretta maggiorazione dell' integrale della più generale equazione ellittico-parabolica alle derivate parziali del 2° ordine ho però già dedicato una circostanziata nota inserita nei Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei [4]).

§ 1.

Dimostrazione della proprietà di minimo delle autosoluzioni della mia Tesi d' abilitazione.

Ecco la semplicissima dimostrazione del teor. I data nella mia Tesi d'abilitazione [loc. cit. [1]) § 5]. Per ogni funzione y di Γ_h' la funzione $\frac{y^2}{u_h}$ è assolutamente continua in (a, b) ed è nulla in a e in b, laddove, quasi ovunque, in (a, b), riesce

$$\frac{d}{dx}\frac{y^2}{u_h} = 2\frac{y}{u_h}\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{u_h^2}\frac{du_h}{dx}.$$

Ma si ha:

$$-(\lambda_h A + B)y^2 = \frac{y^2}{u_h}\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{du_h}{dx}\right),$$

e quindi

$$-\int_a^b (\lambda_h A + B)y^2\,dx = \int_a^b \frac{y^2}{u_h}\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{du_h}{dx}\right)dx$$

$$= -2\int_a^b \theta\frac{y}{u_h}\frac{dy}{dx}\frac{du_h}{dx}\,dx + \int_a^b \theta\left(\frac{y}{u_h}\frac{du_h}{dx}\right)^2 dx,$$

[4]) M. Picone, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine* [Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, **5** della serie 6° (1° sem. 1927), pp. 138—143].

e pertanto

$$J_h[y] = \int_a^b \theta \left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{u_h} \frac{du_h}{dx} \right)^2 dx .$$

E con ciò è completamente dimostrato il teor. I.

§ 2.

Nuovo teorema sugli zeri delle autosoluzioni.

Poggiandosi sul teor. I, dimostrato nel precedente paragrafo, si dimostra immediatamente il seguente:

III. *Detti* $x_{n1}^+, x_{n2}^+, \ldots, x_{nn}^+$ $(x_{n1}^-, x_{n2}^-, \ldots, x_{nn}^-)$ *gli* n *zeri dell'autosoluzione* $u_n(x)$ *(dell'autosoluzione* $u_{-n}(x)$*) interni all'intervallo* (a, b)*, è sempre*

$$(1_+) \qquad \begin{vmatrix} u_0(x_{n1}^+) & u_0(x_{n2}^+) & \ldots & u_0(x_{nn}^+) \\ u_1(x_{n1}^+) & u_1(x_{n2}^+) & \ldots & u_1(x_{nn}^+) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ u_{n-1}(x_{n1}^+) & u_{n-1}(x_{n2}^+) & \ldots & u_{n-1}(x_{nn}^+) \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

$$(1_-) \qquad \begin{vmatrix} u_{-0}(x_{n1}^-) & u_{-0}(x_{n2}^-) & \ldots & u_{-0}(x_{nn}^-) \\ u_{-1}(x_{n1}^-) & u_{-1}(x_{n2}^-) & \ldots & u_{-1}(x_{nn}^-) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ u_{-n+1}(x_{n1}^-) & u_{-n+1}(x_{n2}^-) & \ldots & u_{-n+1}(x_{nn}^-) \end{vmatrix} \neq 0 \ ^{5}).$$

Limitiamoci a dimostrare la (1_+). Se il determinante (1_+) risultasse nullo, ne seguirebbe l'esistenza di una combinazione lineare

$$y = c_0 u_0 + c_1 u_1 + \ldots + c_{n-1} u_{n-1}$$

delle autosoluzioni $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, con coefficienti non tutti nulli, che, oltre ad essere nulla in a e in b, avrebbe, nell'interno di (a, b), anche gli n zeri $x_{n1}^+, x_{n2}^+, \ldots, x_{nn}^+$ di $u_n(x)$. È pertanto (teor. I):

$$(2) \qquad J[y] = \int_a^b \theta \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{du_k}{dx} \right)^2 dx - \lambda_n \int_a^b A \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k \right)^2 dx$$

$$- \int_a^b B \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k \right)^2 dx \geqq 0 .$$

---

[5]) Tale teorema è suscettibile di essere esteso, per quanto ciò non sia immediato, alle autosoluzioni relative alle condizioni lineari più generali considerate al n.° 3 della mia Tesi d'abilitazione (loc. cit. [1]).

Ma si ha:

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b A u_h u_k \, dx = 0 \\ &\int_a^b \theta \frac{du_k}{dx}\frac{du_k}{dx} dx = \int_a^b B u_h u_k \, dx \end{aligned}\right\} (h \neq k),$$

$$\int_a^b \theta \left(\frac{du_k}{dx}\right)^2 dx = \lambda_k \int_a^b A u_k^2 \, dx + \int_a^b B u_k^2 \, dx,$$

$$\lambda_k \int_a^b A u_k^2 \, dx > 0.$$

Donde la (2) fornirebbe

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 (\lambda_k - \lambda_n) \int_a^b A u_k^2 \, dx \geqq 0,$$

ciò che non può sussistere se non quando $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$.

§ 3.

Dimostrazione della proprietà di minimo hilbertiana delle autosoluzioni.

Se ne deduce la seguente elementarissima dimostrazione del teor. II che enuncia la proprietà di minimo hilbertiana delle autosoluzioni u_k. Sia y una funzione dell'aggregato Γ_n'', cioè una funzione, definita in (a, b), ivi assolutamente continua, a numeri derivati finiti e di quadrato sommabile, nulla in a e in b, verificante le n equazioni:

$$(1) \qquad \int_a^b A u_0 y \, dx = \int_a^b A u_1 y \, dx = \ldots = \int_a^b A u_{n-1} y \, dx = 0,$$

vogliamo dimostrare che

$$(2) \qquad J_n[y] = \int_a^b \left[\theta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (\lambda_n A + B) y^2\right] dx \geqq 0,$$

il segno eguale potendo sussistere quando e solo quando risulti $y \equiv \alpha u_n$, con α costante.

In virtù del teor. III del paragrafo precedente, possiamo determinare n costanti $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ in maniera che la combinazione lineare:

$$\eta = y + c_0 u_0 + c_1 u_1 + \ldots + c_{n-1} u_{n-1}$$

abbia in (a, b) anche tutti gli zeri di u_n. Ne segue, in forza del teor. I,

$$(3) \qquad J_n[\eta] \geqq 0.$$

Ma

$$J_n[\eta] = J_n[y] + \int_a^b \theta\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{du_k}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n \int_a^b A\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k\right)^2 dx$$

$$- \int_a^b B\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k\right)^2 dx + 2\int_a^b \theta \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{du_k}{dx}\frac{dy}{dx}\, dx - 2\int_a^b B \sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k y\, dx .$$

Ora, per le (1) e per essere

$$y\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{du_k}{dx}\right) + (\lambda_k A + B) u_k y = 0, \qquad y(a) = y(b) = 0,$$

integrando fra a e b, si ricava

$$\int_a^b \theta \frac{du_k}{dx}\frac{dy}{dx}\, dx = \int_a^b B u_k y\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

laddove, come abbiamo visto al paragrafo precedente,

$$\int_a^b \theta\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{du_k}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n \int_a^b A\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k\right)^2 dx - \int_a^b B\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k\right)^2 dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 (\lambda_k - \lambda_n) \int_a^b A u_k^2\, dx,$$

e pertanto la (3) dà luogo alle seguenti

$$(4) \qquad 0 \leqq J_n[\eta] = J_n[y] + \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 (\lambda_k - \lambda_n) \int_a^b A u_k^2\, dx \leqq J_n[y].$$

Se ne deduce, come appunto volevasi dimostrare, che sussiste la (2). Valga in essa il segno di eguaglianza, dalle (4) si ricava $J_n[\eta] = 0$, e quindi $\eta \equiv \alpha u_n$, α designando una costante, e si ricava anche $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, cioè $y \equiv \alpha u_n$. La proprietà hilbertiana di minimo è così completamente dimostrata con l'ulteriore proposizione:

L'autosoluzione u_n è l'unica funzione assolutamente continua in (a, b), ivi a numeri derivati finiti di quadrato sommabile, nulla in a e in b, verificante le $n+1$ equazioni integrali omogenee nella y:

$$\int_a^b A u_0 y\, dx = \int_a^b A u_1 y\, dx = \ldots = \int_a^b A u_{n-1} y\, dx = 0,$$

$$\int_a^b \left[\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (\lambda_n A + B) y^2\right] dx = 0.$$

§ 4.

Maggiorazione degli integrali, con prescritti valori terminali, delle equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine.

Si abbia l'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine:

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy}{dx}\right)+A(x)y=f(x), \tag{1}$$

$f(x)$ designando una funzione continua in (a, b). Supposto che l'unità non si trovi tra gli autovalori

$$\ldots, \lambda_{-n}, \ldots, \lambda_{-1}, \lambda_{-0}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

del parametro λ nell'equazione:

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{du}{dx}\right)+\lambda A(x)u=0,$$

relativi alle condizioni terminali

$$u(a)=u(b)=0,$$

comunque si assegnino due costanti α e β, esiste sempre uno ed un solo integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni terminali:

$$y(a)=\alpha, \qquad y(b)=\beta; \tag{2}$$

ebbene, vogliamo studiare il problema di calcolare un numero maggiorante per $y(x)$, cioè un numero che non sia superato, in (a, b), dal modulo di $y(x)$.

Su tale problema, la cui soluzione può utilmente applicarsi, com'è accennato nell'introduzione del presente lavoro, per maggiorare l'errore commesso nei calcoli d'approssimazione lineare dell'integrale, ha richiamato la mia attenzione il Prof. Nicolas Kryloff dell'Accademia delle Scienze dell'Ucraina.

1. Noto caso particolare. — Nel caso particolare

$$A(x)\leqq 0 \quad \text{in} \quad (a, b), \tag{3}$$

si ha $\lambda_0=+\infty$ e quindi nella successione degli autovalori non è certo contenuta l'unità. Supposto $\alpha=\beta=0$, cioè che le condizioni terminali prescrite all'integrale $y(x)$ della (1) siano le seguenti omogenee:

$$y(a)=0, \qquad y(b)=0, \tag{2_0}$$

avendosi allora

$$y(x)\equiv\int_a^x\frac{dy}{dx}\,dx,$$

si ricava, per la disuguaglianza di Schwarz,

$$(y(x))^2 \leqq (x-a)\int_a^x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

e quindi

$$(4) \qquad (\max|y|)^2 \leqq (b-a)\int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Moltiplicando ambo i membri della (1) per $y\,dx$ e integrando fra a e b, ove si tenga conto delle (2_0), si ottiene

$$(5) \qquad \int_a^b \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - \int_a^b A y^2\,dx = -\int_a^b f y\,dx,$$

donde, in virtù della (3) e ricordando che in (a, b) è sempre $\theta(x) \geqq p > 0$,

$$p\int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \leqq \left|\int_a^b f y\,dx\right| \leqq (b-a)\max|f|\max|y|,$$

e pertanto, facendo ricorso alla (4), si trova

$$(I) \qquad \max|y| \leqq \frac{(b-a)^2}{p}\max|f|.\ ^{6})$$

Questa prima particolare formula di maggiorazione mi è stata indicata dal signor Kryloff.

2. Ulteriori particolari formule di maggiorazione. — Sia $y(x)$ una funzione definita in (a, b) ivi assolutamente continua con numeri derivati di quadrato sommabile ed essendo x' e x'' $(x'' > x')$ punti di (a, b) poniamo

$$y(x') = y', \qquad y(x'') = y'', \qquad \frac{y''-y'}{x''-x'} = m.$$

Si ha:

$$\int_{x'}^{x''}\left(\frac{dy}{dx} - m\right)^2 dx = \int_{x'}^{x''}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - 2m\int_{x'}^{x''}\frac{dy}{dx}\,dx + m^2(x''-x')$$

$$= \int_{x'}^{x''}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - 2m(y''-y') + m^2(x''-x') = \int_{x'}^{x''}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - \frac{(y''-y')^2}{x''-x'},$$

donde la proposizione:

---

6) Disponendo di f si può dedurre da questa formula la maggiorazione di $y(x)$ anche per le condizioni terminali $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, quali si siano α e β. Ciò si può fare in infiniti modi; uno di questi, che conduce a formule particolarmente semplici, è indicato al n.° 5 del § 4.

Se si divide l'intervallo (a, b) *in* n *qualsivogliano parti, mediante i punti* $x_0 = a,\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, *si ha sempre, per ogni funzione* $y(x)$ *assolutamente continua in* (a, b) *con numeri derivati ivi di quadrato sommabile*;

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{(y(x_k) - y(x_{k-1}))^2}{x_k - x_{k-1}} \leqq \int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

il segno di eguaglianza sussistendo allora e allora soltanto che la funzione $y(x)$ *sia lineare in ciascun intervallo* (x_{k-1}, x_k).

Sia ora: $y(a) = y(b) = 0$ e diciamo c un punto di (a, b) in cui $|y(x)|$ assume il suo massimo. Si ha dalle (6), in particolare

$$(y(c))^2 \left(\frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}\right) \leqq \int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

ma

$$\frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} \geqq \frac{4}{b-a}$$

il segno eguale sussistendo quando e solo quando $c = \frac{(a+b)}{2}$, e pertanto:

Per ogni funzione $y(x)$ *definita nell'intervallo* (a, b) *ivi assolutamente continua, con numeri derivati di quadrato sommabile, verificante le condizioni*

$$(2_0) \qquad y(a) = y(b) = 0,$$

si ha

$$(7) \qquad (\max |y|)^2 \leqq \frac{b-a}{4} \int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

---

[7]) Conseguenza di tale proposizione elementare è la seguente che parmi istruttiva in un'introduzione al Calcolo delle variazioni: *Siano* $x_0 = a,\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, $n+1$ *punti comunque assegnati e diciamo* Γ *la totalità delle funzioni* $y(x)$, *continue nell'intervallo* (a, b) *con le loro derivate prime, verificanti le condizioni*:

$$y(x_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

ove $y_0, y_1, \ldots, y_n$ *sono quantità date, L'estremo inferiore dell'integrale*

$$J_n[y] \equiv \int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

nell'indicata totalità Γ *è dato dal numero*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(y_k - y_{k-1})^2}{x_k - x_{k-1}}.$$

Se gli $n+1$ *punti* $(x_k\ y_k)$ *del piano* (x, y) *non sono tutti allineati tale estremo inferiore non è un minimo. Nell'altro caso esso è il minimo assoluto proprio in* Γ.

potendo sussistere il segno eguale allora e allora soltanto che, essendo c il punto medio di (a, b), *la* $y(x)$ *si comporti linearmente in* (a, c) *e in* (c, b).

Si è dunque così ridotto ad $\frac{1}{4}$ del suo valore il secondo membro della limitazione (4), ed un' ulteriore riduzione non è possibile.

In forza della (7) si ha perciò, nel caso particolare

$$A(x) \leqq 0, \tag{3}$$

la seguente formula di maggiorazione dell' integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni omogenee (2_0):

$$\max|y| \leqq \frac{(b-a)^2}{4p} \max|f|. \tag{II}$$

Ma, anche se non è sempre soddisfatta la (3), detto M un numero non negativo non inferiore al massimo di $A(x)$ in (a, b), si trae dalla (5)

$$p\int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - M(b-a)(\max|y|)^2 \leqq (b-a)\max|y|\max|f|,$$

donde, moltiplicando ambo i membri di questa diseguaglianza per $b-a$ e facendo ricorso alla (7), se ne ricava

$$4p(\max|y|)^2 - M(b-a)^2(\max|y|)^2 \leqq (b-a)^2\max|y|\max|f|$$

e si ha, pertanto, la proposizione che contiene la precedente:

IV. *Se riesce in* (a, b)

$$4\min\theta(x) - (b-a)^2\max A(x) > 0, \tag{8}$$

per l' integrale $y(x)$ *della* (1) *verificante le condizioni omogenee* (2_0) *sussiste la seguente formula di maggiorazione*

$$\max|y| \leqq \frac{(b-a)^2}{4p-(b-a)^2 M} \max|f|, \tag{III}$$

p designando il minimo di $\theta(x)$ *e M il massimo di* $A(x)$, *se* $A(x)$ *prende in* (a, b) *anche valori positivi, lo zero, se si è nell' altro caso*[8]).

Supponendo che sia

$$\theta(x) \equiv 1, \quad \pi^2 - (b-a)^2\max A(x) > 0, \tag{9}$$

si può non essere nelle ipotesi del teor. IV ora stabilito, ma si può egualmente maggiorare l' integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni terminali (2) lasciando α e β affatto arbitrarie, seguendo il metodo generale da me dato nella mia nota dei Lincei sulla maggiorazione degli inte-

[8]) Per le più generali condizioni terminali $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, cfr. l' osservazione alla fine del n.° 5 dell' attuale paragrafo.

grali delle equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine, in quante si vogliano variabili, [loc. cit. [4])]. Supposto, per semplificare la scrittura, $a = 0$, $b = 1$, si trova allora:

V. *Se, nell'intervallo* $(0, 1)$, *riesce*

$$\theta(x) \equiv 1, \qquad \pi^2 - \max A(x) > 0,$$

per l'integrale $y(x)$ *della* (1) *verificante le condizioni* (2), *sussiste la seguente formula di maggiorazione*

$$\max|y| \leqq \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi q}{1+2q}}(\gamma + H\max|f|), \tag{IV}$$

ove:

γ è il più grande fra i due numeri $|\alpha|$ e $|\beta|$,

q è un numero positivo tale che riesca

$$\max A(x) \leqq \frac{\pi^2}{(1+2q)^2},$$

H è dato dalla eguaglianza

$$H = \frac{1}{h^2}(e^{3h} - e^h),$$

nella quale h indica il più grande tra i numeri

$$\log 2, \qquad \frac{4\pi}{1+2q}\cot\frac{q\pi}{1+2q}.$$

Le condizioni (8) e (9) nelle quali, coi teoremi IV e V, abbiamo maggiorato l'integrale $y(x)$ della (1) rientrano entrambe nella seguente

$$\pi^2 \min\theta(x) - (b-a)^2 \max A(x) > 0, \tag{10}$$

e vogliamo ora dimostrare che, soddisfatta questa condizione, esiste un integrale dell'equazione omogena

$$E[u] \equiv \frac{d}{dx}\left(\theta\frac{du}{dx}\right) + A(x)u = 0, \tag{1_0}$$

sempre positivo in (a, b). Ciò è ben noto, ma eccone una semplice dimostrazione: Soddisfatta la (10) e posto $\min\theta(x) = p$, diciamo q un numero positivo tale che risulti

$$\max A(x) \leqq \frac{\pi^2 p}{(b-a+2q)^2},$$

e consideriamo l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + \frac{\pi^2 p}{(b-a+2q)^2}u = 0. \tag{11}$$

L'integrale di questa

$$u = \operatorname{sen}\left(\pi\frac{x-a+q}{b-a+2q}\right),$$

riesce sempre positivo in (a, b), ma allora, per un classico teorema di Sturm[9]), relativo al confronto dell'equazione (1_0) con l'equazione (11), si può concludere, anche per l'equazione (1_0), la asserita esistenza di un suo integrale sempre positivo in (a, b). Noto un tale integrale, il ricordato metodo della citata mia nota dei Lincei (loc. cit.[4])), dà immediatamente una formula di maggiorazione per l'integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni terminali (2). Ma in quella nota è dimostrato di più che:

Nota una funzione $\omega(x)$ per la quale risulti sempre in (a, b),

$$\omega(x) > 0, \quad E[\omega] \equiv \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{d\omega}{dx}\right) + A(x)\omega \leqq 0, \tag{12}$$

si ha immediatamente una formula di maggiorazione dell'integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni terminali (2).

Ebbene, vogliamo ora quì dimostrare che:

VI. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione $\omega(x)$ verificante le (12) in (a, b) è che per il più piccolo autovalore positivo λ_0 si abbia*

$$\lambda_0 > 1. \tag{13}$$

La condizione è notoriamente sufficiente; ed invero, suppostala soddisfatta, esiste[10]) un integrale $\omega(x)$ di $E[\omega] = 0$, sempre positivo in (a, b). Dimostriamone la necessità. Sia dunque $\omega(x)$ una funzione sempre positiva in (a, b) per la quale riesca sempre

$$E[\omega] = \varphi(x) \leqq 0,$$

se ne deduce

$$A(x) = \frac{1}{\omega}\left[\varphi - \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{d\omega}{dx}\right)\right],$$

e quindi per l'autosoluzione u_0:

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{du_0}{dx}\right) + \frac{\lambda_0}{\omega}\left[\varphi - \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{d\omega}{dx}\right)\right] u_0 = 0,$$

donde, moltiplicando ambo i membri di questa eguaglianza per $u_0 dx$ e integrando tra a e b,

$$(\lambda_0 - 1)\int_a^b \theta\left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 dx + \lambda_0 \int_a^b \frac{\varphi}{\omega} u_0^2 dx - \lambda_0 \int_a^b \theta\left(\frac{du_0}{dx} - \frac{u_0}{\omega}\frac{d\omega}{dx}\right)^2 dx = 0,$$

e pertanto, poichè $\lambda_0 > 0$, $\varphi(x) \leqq 0$ e u_0 non è certo proporzionale a $\omega(x)$, si ha la (13).

---

[9]) Gioverà tener presenti, specialmente nel seguito, i complementi apportati a tale teorema nei n.i 4, 5 e 10 della mia Tesi d'abilitazione [loc. cit.[1])].

[10]) Cfr. il § 3 della mia Tesi d'abilitazione oppure il Cap. I del mio citato Corso d'Analisi Superiore (loc. cit.[1])).

Le condizioni dunque, sotto le quali nella citata mia nota dei Lincei (loc. cit.[4])) ho maggiorato l'integrale $y(x)$ della (1) che assume valori prescritti terminali, equivalgono perfettamente ad ammettere la (13). Secondo i risultati di quella nota, soddisfatta la (13), la formula di maggiorazione si scrive effettivamente quando si conosca una funzione $\omega(x)$, verificante le (12), ma nel successivo n.° 4 dimostreremo che la detta formula può anche scriversi quando, soltanto, si conosca λ_0.

3. Perfezionamento delle formule (II) e (III). — Se x' e x'' sono due qualsivogliano punti di (a, b) $(x'' > x')$, posto $y(x') = y', y(x'') = y''$, in virtù della disuguaglianza di Schwarz, essendo $y(x)$ una funzione definita in (a, b), ivi assolutamente continua con numeri derivati di quadrato sommabile, si ha

$$(14)\quad (y''-y')^2 = \left(\int_{x'}^{x''} \frac{dy}{dx}\,dx\right)^2 = \left(\int_{x'}^{x''} \frac{1}{\sqrt{\theta}}\left(\sqrt{\theta}\,\frac{dy}{dx}\right)dx\right)^2 \leqq \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\theta(x)} \int_{x'}^{x''} \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

il segno uguale sussistendo quando e solo quando riesce $\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy}{dx}\right) = 0$. A ciò si perviene anche considerando (cfr. n.° 2) che, posto

$$m = \frac{y''-y'}{\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\theta(x)}}$$

si ha:

$$\int_{x'}^{x''} \theta\left(\frac{dy}{dx} - \frac{m}{\theta}\right)^2 dx = \int_{x'}^{x''} \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - m(y''-y').$$

Sia ora $y(a) = y(b) = 0$ e diciamo c un punto di (a, b) ove $|y(x)|$ assume il suo massimo, si ha, in virtù della (14),

$$\int_a^c \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \geqq \frac{(y(c))^2}{\int_a^c \frac{dx}{\theta(x)}}, \qquad \int_c^b \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \geqq \frac{(y(c))^2}{\int_c^b \frac{dx}{\theta(x)}},$$

e quindi

$$\int_a^b \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \geqq (y(c))^2 \left(\frac{1}{\int_a^c \frac{dx}{\theta(x)}} + \frac{1}{\int_c^b \frac{dx}{\theta(x)}}\right),$$

ma

$$\frac{1}{\int_a^c \frac{dx}{\theta(x)}} + \frac{1}{\int_c^b \frac{dx}{\theta(x)}} \geqq \frac{4}{\int_a^b \frac{dx}{\theta(x)}}$$

e pertanto:

Per ogni funzione $y(x)$, definita in (a, b), ivi assolutamente continua, con numeri derivati di quadrato sommabile, verificante le condizioni (2_0), si ha:

$$(15) \qquad (\max|y|)^2 \leqq \frac{1}{4}\int_a^b \frac{dx}{\theta(x)} \int_a^b \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Tale diseguaglianza consente, come ora andiamo a mostrare, un notevole perfezionamento delle formule di maggiorazione (II) e (III). Porremo sempre, nel seguito,

$$\Theta = \int_a^b \frac{dx}{\theta(x)}.$$

Considerando la (5), essa fornisce, nel caso $A(x) \leqq 0$

$$\frac{\Theta}{4}\int_a^b \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \leqq -\frac{\Theta}{4}\int_a^b f y\, dx,$$

e quindi, in virtù della (15), si deduce la seguente formula di maggiorazione per l'integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni omogenee (2_0):

$$(II') \qquad \max|y| \leqq \frac{b-a}{4}\Theta \max|f|, \qquad (A(x) \leqq 0).$$

con la quale si consegue un notevole perfezionamento della (II), poichè, se $\theta(x)$ non è costante, riesce

$$\Theta = \int_a^b \frac{dx}{\theta(x)} < \frac{b-a}{p} = \frac{b-a}{\min\theta(x)}.$$

Ma, anche se non è $A(x) \leqq 0$, detto M un numero non negativo non inferiore al massimo di $A(x)$ in (a, b), si trae dalla (5), facendo ricorso alla (15),

$$(\max|y|)^2 - M\frac{\Theta}{4}(b-a)(\max|y|)^2 \leqq \frac{\Theta}{4}(b-a)\max|y|\max|f|,$$

e quindi:

IV'. *Se riesce in (a, b)*

$$4 - \Theta(b-a)\max A(x) > 0,$$

per l'integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni terminali omogenee (2_0), sussiste la seguente formula di maggiorazione:

$$(III') \qquad \max|y| \leqq \frac{(b-a)\Theta}{4-(b-a)\Theta M}\max|f|,$$

M designando il massimo di $A(x)$, se $A(x)$ prende in (a, b) anche valori positivi, lo zero se si è nell'altro caso.

Con questo teorema e con la formula (III′) si consegue, ovviamente, un notevole perfezionamento del teor. IV e della formula (III).

4. Maggiorazione nel caso che il più piccolo autovalore positivo sia maggiore di uno. — Per il più piccolo autovalore positivo λ_0 si abbia:

$$\lambda_0 > 1; \tag{16}$$

partendo dalla (5):

$$\int_a^b \theta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \int_a^b A y^2 \, dx - \int_a^b f y \, dx,$$

poichè (teor. I)

$$\int_a^b \theta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \geqq \lambda_0 \int_a^b A y^2 \, dx,$$

se ne deduce

$$\int_a^b \theta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \leqq \frac{1}{\lambda_0} \int_a^b \theta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - \int_a^b f y \, dx,$$

e quindi, sussistendo la (16),

$$\frac{\Theta}{4} \int_a^b \theta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \leqq - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{\Theta}{4} \int_a^b f y \, dx$$

donde, in forza della (15), si trae

$$(\max |y|)^2 \leqq \frac{-\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{\Theta}{4} \int_a^b f y \, dx \leqq (b-a) \frac{\Theta}{4} \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \max |f| \max |y| .$$

E si ha dunque il teorema:

VII. *Se il più piccolo autovalore positivo λ_0 è maggiore di uno, noto tale autovalore, per l'integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni terminali omogenee (2_0) vale la seguente formula di maggiorazione*

$$\max |y| \leqq (b-a) \frac{\Theta}{4} \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \max |f| . \tag{V}$$

Per $\lambda_0 \to \infty$ tale formula si riduce alla (II′).

Si osservi che se $1 < \mu < \lambda_0$, riesce $\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} < \frac{\mu}{\mu - 1}$ e pertanto che: Nella formula (V) di maggiorazione si può sostituire all'autovalore λ_0 una quantità $\mu > 1$ che dia un valore di λ_0 approssimato per difetto. Ne segue che:

VIII. *Se la successione crescente di quantità positive*

$$\mu', \ \mu'', \ldots, \mu^{(n)}, \ldots,$$

ha per limite il più piccolo autovalore positivo λ_0, *e se*

$$\mu^{(n)} > 1 \quad \text{per} \quad n > N,$$

per l'integrale $y(x)$ *della* (1) *verificante le condizioni terminali* (2_0) *si hanno le seguenti formule di maggiorazione*:

$$(V^{(n)}) \qquad \max|y| \leqq \frac{(b-a)\Theta\,\mu^{(n)}}{4(\mu^{(n)}-1)} \max|f|, \quad \text{per } n > N.$$

Nella mia Tesi d'abilitazione [loc. cit.[1]), n.i 30 e 31] trovansi appunto costruite, e con facili costruzioni, successioni crescenti di quantità positive aventi per limite λ_0; da quelle successioni si potrebbero trarre, dunque, formule di maggiorazione per l'integrale $y(x)$, il conseguimento delle quali avrebbe certo interesse.

Noi qui rinuncieremo a far ciò completamente, accontentandoci di indicare taluni casi particolari, che danno luogo a formule semplici di maggiorazione. Una prima si ha nell'ipotesi che sia soddisfatta la diseguaglianza, considerata al n.° 2,

$$(10) \qquad \pi^2 \min\theta(x) - (b-a)^2 \max A(x) > 0.$$

Detto M un numero positivo non inferiore al massimo di $A(x)$ in (a, b), confrontiamo l'equazione

$$(17) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta}{\lambda_0}\frac{du}{dx}\right) + Au = 0,$$

alla quale soddisfa l'autosoluzione $u_0(x)$, con l'equazione

$$(18) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\lambda_0}\frac{du}{dx}\right) + Mu = 0.$$

Poichè la soluzione $u_0(x)$ della (17) è nulla in a e in b, ogni soluzione della (18) nulla in a, per il già citato teorema di confronto di Sturm, deve ulteriormente annullarsi in (a, b). Una tale soluzione della (18) è

$$\operatorname{sen}\left[\sqrt{\frac{\lambda_0 M}{p}}(x-a)\right],$$

e perchè essa possa ulteriormente annullarsi in (a, b), deve essere

$$\sqrt{\frac{\lambda_0 M}{p}}(b-a) \geqq \pi,$$

ne segue che:

$$\frac{p\pi^2}{M(b-a)^2} \leqq \lambda_0.$$

La quantità $\frac{p\pi^2}{M(b-a)^2}$ fornisce dunque un valore approssimato per difetto di λ_0, essa, per la (10), è maggiore di uno, e si ha dunque il teorema:

VIII′ *Posto* $p = \min \theta(x)$ *e detto* M *un numero positivo non superato da* $\max A(x)$, *soddisfatta la condizione* $\pi^2 p - (b-a)^2 M > 0$, *per l'integrale* $y(x)$ *della* (1) *verificante le* (2_0), *si ha la formula di maggiorazione*:

$$\text{(VI)} \qquad \max |y| \leqq \frac{\Theta (b-a)\, \pi^2 p}{4 [p\pi^2 - (b-a)^2 M]} \max |f| .$$

Posto (cfr. Tesi d'abilitazione, n.° 24)

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\Theta} \int_a^x \frac{ds}{\theta(s)} \int_\xi^b \frac{ds}{\theta(s)}, \quad \text{per} \quad x \leqq \xi,$$

$$= \frac{1}{\Theta} \int_a^\xi \frac{ds}{\theta(s)} \int_x^b \frac{ds}{\theta(s)}, \quad \text{per} \quad x \geqq \xi,$$

detti: N' il massimo in (a, b) della funzione di x:

$$\int_a^b G(x,\xi)\, |A(\xi)|\, d\xi ,$$

N'' il massimo della funzione

$$\left[(b-a) \int_a^b (G(x,\xi)\, A(\xi))^2\, d\xi \right]^{\frac{1}{2}},$$

N il valore di

$$\left[\int_a^b (A(\xi))^2\, d\xi \int_a^b (G(x,\xi))^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

altri valori approssimati per difetto dell'autovalore λ_0 sono i seguenti:

$$\frac{1}{N'}, \quad \frac{1}{N''}, \quad \frac{1}{N},$$

e pertanto, rispettivamente per $N' < 1$, $N'' < 1$, $N < 1$, si hanno gli ulteriori seguenti numeri maggioranti l'integrale $y(x)$ della (1) verificante le (2_0):

$$\frac{\Theta}{4} \frac{b-a}{1-N'} \max |f|, \qquad \frac{\Theta}{4} \frac{b-a}{1-N''} \max |f|, \qquad \frac{\Theta}{4} \frac{b-a}{1-N} \max |f| .$$

Per esempio, per $\theta(x) \equiv 1$, si ha

$$N^2 = \frac{1}{3(b-a)} \int_a^b (A(x))^2 (x-a)^2 (b-x)^2\, dx ,$$

ed ovviamente, anche se $A(x)$ ha in (a, b) un massimo di grande valore, tale valore di N può riuscire molto piccolo.

Così, per l'integrale $y(x)$ dell'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\cos x = f(x),$$

erificante le condizioni $y(0) = y(\pi) = 0$, la formola (VI) non dà aleuna aggiorazione nell'intervallo $(0, \pi)$, laddove, risultando $N^2 = \frac{\pi^4}{180} = \frac{1}{4}$ $= 0{,}29\ldots$, in virtù dell'ultima formula trovata si può asserire che, nello ntervallo $(0, \pi)$, riesce

$$\max|y| \leqq \frac{\pi^2}{4(1-N)} \max|f| < 6 \max|f|.$$

5. Formule generali di maggiorazione. — Prima di passare a dare e più generali formule di maggiorazione conviene osservare alcune relazioni.

Sia $y(x)$ l'integrale dell'equazione (1) verificante le condizioni terminali (2_0) e ricordiamo che l'autosoluzione u_k soddisfa le equazioni:

19) $$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{du_k}{dx}\right) + \lambda_k A u_k = 0 \qquad (u_k(a) = u_k(b) = 0).$$

Se, dopo aver moltiplicato ambo i membri della (1) per u_k ed ambo membri della (19) per y, sottragghiamo membro a membro queste guaglianze, si trova

$$\frac{d}{dx}\left[\theta\left(u_k\frac{dy}{dx} - y\frac{du_k}{dx}\right)\right] + (1-\lambda_k) A y u_k = f u_k,$$

quindi, integrando fra a e b,

20) $$(1-\lambda_k)\int_a^b A y u_k\, dx = \int_a^b f u_k\, dx.$$

alle (19) si ha pure

$$\int_a^b \theta\left(\frac{du_k}{dx}\right)^2 dx = \lambda_k \int_a^b A u_k^2\, dx,$$

onde, facendo ricorso alla (15), per essere $\int_a^b A u_k^2\, dx > 0$,

21) $$\frac{\max u_k^2}{\int_a^b A u_k^2\, dx} \leqq \frac{\Theta}{4}\lambda_k.$$

Ciò posto supponiamo che l'unità sia compresa fra i due successivi utovalori positivi λ_{r-1} e λ_r, $r \geqq 1$, che si abbia cioè

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{r-1} < 1 < \lambda_r.$$

Assunti come noti gli autovalori $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$, vogliamo conseguire na formula di maggiorazione per l'integrale $y(x)$ della (1) verificante

le condizioni (2_0), la quale formula dovrà evidentemente riguardarsi come la più generale per le condizioni terminali omogenee.

A tale scopo si ponga

$$\eta = y - \sum_{k=0}^{r-1} c_k u_k ,$$

con

$$c_k = \frac{\int_a^b A y u_k \, dx}{\int_a^b A u_k^2 \, dx} = \frac{1}{1-\lambda_k} \frac{\int_a^b f u_k \, dx}{\int_a^b A u_k^2 \, dx} ;$$

si avrà:

$$(22) \qquad \eta(a) = \eta(b) = 0 , \qquad \int_a^b A u_k \eta \, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, r-1),$$

e sostituendo nella (1),

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{d\eta}{dx}\right) + A\eta + \sum_{k=0}^{r-1} c_k \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{du_k}{dx}\right) + \sum_{k=0}^{r-1} A c_k u_k = f(x) ,$$

cioè, tenendo conto della prima delle (19),

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{d\eta}{dx}\right) + A\eta = f(x) - \sum_{k=0}^{r-1} A c_k (1-\lambda_k) u_k .$$

Moltiplicando ambo i membri di quest'ultima eguaglianza per $\eta \, dx$ e integrando poscia fra a e b, si ottiene, in virtù delle (22),

$$(23) \qquad \int_a^b \theta \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx = \int_a^b A\eta^2 \, dx - \int_a^b f\eta \, dx .$$

Ora per la proprietà hilbertiana di minimo degli autovalori (teor. II), poichè sono verificate le (22), si ha

$$\int_a^b \theta \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx \geqq \lambda_r \int_a^b A\eta^2 \, dx ,$$

e pertanto, per essere $\lambda_r - 1 > 0$, si deduce dalla (23):

$$\int_a^b \theta \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx \leqq \frac{-\lambda_r}{\lambda_r - 1} \int_a^b f\eta \, dx ,$$

donde, facendo ricorso alla (15),

$$\max |\eta| \leqq \frac{(b-a)\lambda_r \Theta}{4(\lambda_r - 1)} \max |f| .$$

Ne segue:

$$\max|y| \leqq \max|\eta| + \sum_{k=0}^{r-1} |c_k| \max|u_k|$$

$$\leqq \frac{(b-a)\lambda_r \Theta}{4(\lambda_r - 1)} \max|f| + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{1-\lambda_k} \frac{\max|u_k|}{\int_a^b A u_k^2 \, dx} \left| \int_a^b f u_k \, dx \right|$$

$$\leqq \frac{(b-a)\lambda_r \Theta}{4(\lambda_r - 1)} \max|f| + \left(\sum_{k=0}^{r-1} \frac{b-a}{1-\lambda_k} \frac{\max|u_k^2|}{\int_a^b A u_k^2 \, dx} \right) \max|f| ,$$

e pertanto, tenendo presente la (21), il teorema:

IX. *Se per un certo valore non nullo dell'indice r, si ha:*

$$\lambda_{r-1} < 1 < \lambda_r ,$$

noti gli autovalori $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_r$, per l'integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni terminali omogenee (2_0), si ha la seguente formula di maggiorazione:

$$\text{(VII)} \quad \max|y| \leqq \frac{b-a}{4} \Theta \left(\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} + \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} + \ldots + \frac{\lambda_{r-1}}{1-\lambda_{r-1}} + \frac{\lambda_r}{\lambda_r - 1} \right) \max|f|$$

$$\leqq \frac{b-a}{4} \Theta \left(\frac{r\lambda_{r-1}}{1-\lambda_{r-1}} + \frac{\lambda_r}{\lambda_r - 1} \right) \max|f| .$$

Se λ_k' e λ_k'' indicano due valori approssimati dell'autovalore λ_k, il primo per difetto ed il secondo per eccesso, e se riesce

$$\lambda_k'' < 1 < \lambda_r' \qquad (k = 0, 1, \ldots, r-1),$$

per l'integrale $y(x)$ sussiste la seguente formula di maggiorazione

$$\text{(VIII)} \quad \max|y| \leqq \frac{(b-a)\Theta}{4} \left(\frac{\lambda_0''}{1-\lambda_0''} + \frac{\lambda_1''}{1-\lambda_1''} + \ldots + \frac{\lambda_{r-1}''}{1-\lambda_{r-1}''} + \frac{\lambda_r'}{\lambda_r' - 1} \right) \max|f| ,$$

ed anche l'altra:

$$\text{(IX)} \qquad \max|y| \leqq \frac{(b-a)\Theta}{4} \left(\frac{r\lambda_{r-1}''}{1-\lambda_{r-1}''} + \frac{\lambda_r'}{\lambda_r' - 1} \right) \max|f| .$$

I metodi di calcolo degli autovalori della mia Tesi d'abilitazione (loc. cit. [1]), n.i 30 e 31) possono fornire appunto tali valori approssimati per eccesso e per difetto di ogni autovalore λ_k e si potrebbero perciò trarre, dalle formule (VIII) e (IX) formule di maggiorazione per l'integrale $y(x)$, il conseguimento delle quali avrebbe certo interesse.

I teoremi di confronto di Sturm danno già un valore approssimato per difetto dell'autovalore λ_r. Detto invero M il massimo di $A(x)$ in

(a, b), confrontiamo le due equazioni:

$$(24)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta}{\lambda_r}\frac{du}{dx}\right) + A(x)u = 0, \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\lambda_r}\frac{du}{dx}\right) + Mu \quad = 0. \end{cases}$$

La prima possiede l'integrale $u_r(x)$ nullo in a e in b e, ulteriormente, in r punti interni ad (a, b); onde segue, in forza dell'indicato teorema di Sturm, che l'integrale

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\lambda_r M}{p}}(x-a)\right)$$

della seconda delle (24), nullo in a, deve possedere in (a, b) almeno, altri $r+1$ punti di zero, e deve quindi risultare

$$\sqrt{\frac{\lambda_r M}{p}}(b-a) \geqq (r+1)\pi,$$

e pertanto:

X. *La quantità*

$$\frac{(r+1)^2\pi^2 p}{M(b-a)^2} \leqq \lambda_r$$

fornisce un valore di λ_r, *approssimato per difetto.*

Se si fa l'ipotesi che il minimo di $A(x)$ in (a, b), che indicheremo con m, sia positivo, gli stessi teoremi di Sturm danno anche, com'è noto, un valore di λ_r approssimato per eccesso. Detto, invero, P il massimo di $\theta(x)$ in (a, b), confrontiamo le due equazioni:

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{du}{dx}\right) + \lambda_r A(x)u = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(P\frac{du}{dx}\right) + \lambda_r m u \quad = 0.$$

La soluzione $u_r(x)$ della prima è nulla in a e in b e, inoltre, in r soli punti interni ad (a, b), ma allora la soluzione della seconda

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{m\lambda_r}{P}}(x-a)\right),$$

nulla in a, non potrà ulteriormente annullarsi in (a, b) più di r volte, e deve perciò risultare

$$\sqrt{\frac{m\lambda_r}{P}}(b-a) \leqq (r+1)\pi,$$

e pertanto:

XI. *Se* $\min A(x) > 0$, *posto* $m = \min A(x)$, $P = \max\theta(x)$, *la quantità*

$$\frac{(r+1)^2\pi^2 P}{m(b-a)^2} \geqq \lambda_r,$$

fornisce un valore di λ_r, *approssimato per eccesso.*

Possiamo, dopo ciò, enunciare, come caso particolare del teor. IX, il seguente:

XII. *Se, per un certo numero intiero e positivo* r, *riesce*

$$r^2\pi^2 \max\theta(x) - (b-a)^2 \min A(x) < 0,$$
$$(r+1)^2\pi^2 \min\theta(x) - (b-a)^2 \max A(x) > 0,$$

posto $\min\theta(x) = p$, $\max\theta(x) = P$, $\min A(x) = m$, $\max A(x) = M$, *per l'integrale* $y(x)$ *della* (1) *verificante le condizioni terminali omogenee* (2_0), *sussiste la seguente formula di maggiorazione*:

$$\max|y| \leqq \frac{\pi^2}{4}(b-a)\,\Theta\left(\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(k+1)^2 P}{(b-a)^2 m-(k+1)^2\pi^2 P}+\frac{(r+1)^2 p}{(r+1)^2\pi^2 p-(b-a)^2 M}\right)\max|f|$$
$$\leqq \frac{\pi^2}{4}(b-a)\,\Theta\left(\frac{r^3 P}{(b-a)^2 m-r^3\pi^2 P}+\frac{(r+1)^2 p}{(r+1)^2\pi^2 p-(b-a)^2 M}\right)\max|f|.$$

Ottenute le formule maggioranti per l'integrale $y(x)$ della (1) che verifica le condizioni terminali omogenee (2_0), formule che sono tutte riuscite del tipo:

$$\max|y| \leqq \Lambda \max|f|,$$

ove Λ designa un fattore indipendente dalla funzione $f(x)$, se ne possono, ovviamente, disponendo di f, dedurre infinite altre anche per le più generali condizioni terminali:

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta. \tag{2}$$

Perciò, detta $v(x)$ una funzione arbitraria verificante tali condizioni, continua con le sue derivate dei due primi ordini, posto

$$y = \eta(x) + v(x)$$

si avrà che $\eta(x)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d\eta}{dx}\right) + A(x)\eta = f(x) - \frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dv}{dx}\right) - A(x)v$$

e le condizioni terminali omogenee (2_0). Se ne ricava dunque per $y(x)$ la seguente formula di maggiorazione

$$\max|y| \leqq \Lambda \max\left|f - \frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dv}{dx}\right) - Av\right| + \max|v|$$
$$\leqq \Lambda \max|f| + \Lambda \max\left|\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dv}{dx}\right) + Av\right| + \max|v|,$$

che contiene la funzione arbitraria $v(x)$. E naturalmente le più utili formule si ottengono scegliendo fra le funzioni $v(x)$ verificanti le condi-

zioni (2), quelle per cui la quantità,

$$(25) \qquad A \max \left| \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dv}{dx}\right) + A v \right| + |\max v|,$$

assume il più piccolo valore possibile.

In modo particolarmente semplice si può maggiorare la quantità (25) se si prende per $v(x)$ l'integrale dell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dv}{dx}\right) = 0,$$

verificante le condizioni (2). Il massimo modulo di tale integrale è dato (cfr. la citata mia nota dei Lincei, loc. cit. [4]), teor. V) dal più grande tra i due numeri $|\alpha|$ e $|\beta|$, e pertanto si giunge al risultato:

XIII. *Se l'integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni terminali omogenee (2_0) è maggiorato dal numero*

$$A \max |f|,$$

per l'integrale $y(x)$ della (1) verificante le più generali condizioni terminali:

$$(2) \qquad y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta,$$

sussiste la seguente formula di maggiorazione:

$$(XI) \qquad \max |y| \leqq A \max |f| + (A \max |A| + 1)\gamma$$

ove γ è il più grande fra i due numeri $|\alpha|$ e $|\beta|$. [11])

Così per l'integrale $y(x)$ dell'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y \cos x = f(x),$$

verificante le condizioni $y(0) = \alpha$, $y(\pi) = \beta$, si trova (cfr. la fine del n.° 4) che, nell'intervallo $(0, \pi)$, esso è maggiorato dal numero

$$6 \max |f| + 7\gamma.$$

6. Maggiorazioni più ristrette. — Formule di maggiorazione nelle quali il numero maggiorante l'integrale $y(x)$ riesce notevolmente abbassato, particolarmente utili per il calcolo approssimato dell'integrale, si trovano facendo ricorso alla seguente proposizione che facilmente si deduce dalla diseguaglianza di Hölder:

Se le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, definite nell'intervallo (a, b), sono ivi limitate e misurabili, comunque si assegnino i numeri reali μ e ν entrambi maggiori di uno, per ogni funzione $\varrho(x)$ non negativa in (a, b) ed

[11]) È istruttivo il confronto della formula ora ottenuta con la formula (IV) stabilita, per tutt'altra via, al n.° 2.

ivi sommabile con la sua potenza

$$(\varrho(x))^{-\frac{\nu}{\mu-1}},$$

sussiste la relazione

$$\left|\int_a^b \psi(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqq \max|\psi(x)|\,\Omega_{\mu\nu}[\varrho,\varphi], \tag{26}$$

ove $\max|\psi(x)|$ *designa l'estremo superiore di* $|\psi(x)|$ *in* (a,b), *ed è*

$$\Omega_{\mu\nu}[\varrho,\varphi] = (b-a)^{\frac{\mu-1}{\mu}\frac{\nu-1}{\nu}}\left(\int_a^b (\varrho(x))^{-\frac{\nu}{\mu-1}}dx\right)^{\frac{\mu-1}{\mu\nu}}\left(\int_a^b \varrho(x)|\varphi(x)|^{\mu}dx\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Nei riguardi del funzionale $\Omega_{\mu\nu}[\varrho,\varphi]$ si stabiliscono immediatamente le proprietà seguenti

$$\Omega_{\mu\nu}[\varrho, c\varphi] = c\,\Omega_{\mu\nu}[\varrho,\varphi], \text{ essendo } c \text{ costante},$$
$$\Omega_{\mu\nu}[\varrho, \varphi_1\cdot\varphi_2] \leqq \max|\varphi_2|\,\Omega_{\mu\nu}[\varrho,\varphi_1],$$
$$\Omega_{\mu\nu}[\varrho, \varphi_1+\varphi_2] \leqq \Omega_{\mu\nu}[\varrho,\varphi_1] + \Omega_{\mu\nu}[\varrho,\varphi_2].$$

Ciò posto, diciamo $y(x)$ un integrale della (1) verificante le condizioni omogenee (2_0), dalle (5) e (15) si deduce

$$(\max|y|)^2 - \frac{\Theta}{4}\int_a^b A y^2\,dx \leqq -\frac{\Theta}{4}\int_a^b f y\,dx,$$

e quindi, in virtù della (26),

$$\max|y|\,(4-\Theta\,\Omega_{\mu\nu}[\varrho,A]) \leqq \Theta\,\Omega_{\mu'\nu'}[\varrho',f].$$

Ne segue:

IV″. *Se è possibile trovare i numeri* μ *e* ν *maggiori di uno e la funzione* $\varrho(x)$ *mai negativa in* (a,b) *ivi sommabile con la potenza* $(\varrho(x))^{-\frac{\nu}{\mu-1}}$, *per modo che riesca*

$$4-\Theta\,\Omega_{\mu\nu}[\varrho,A] > 0, \tag{28}$$

per l'integrale $y(x)$ *della* (1) *verificante le condizioni* (2_0) *sussiste la seguente formula di maggiorazione*

$$\max|y| \leqq \frac{\Theta\,\Omega_{\mu'\nu'}[\varrho',f]}{4-\Theta\,\Omega_{\mu\nu}[\varrho,A]}, \tag{III″}$$

comunque si prendano i numeri μ' *e* ν' *entrambi maggiori di uno e la funzione* $\varrho'(x)$ *mai negativa in* (a,b), *ivi sommabile con la potenza* $(\varrho'(x))^{-\frac{\nu'}{\mu'-1}}$.

Se ne deduce il notevole teorema:

XIV. *Se è possibile trovare i numeri μ e ν e la funzione $\varrho(x)$, in modo che risulti verificata la* (28), *l'unità non è un autovalore.*

Supponiamo ora, in secondo luogo, di sapere che per gli autovalori λ_{r-1} e λ_r riesce $\lambda_{r-1} < 1 < \lambda_r$. Se si considera la funzione $\eta(x)$ introdotta in principio del n.° precedente, dalla relazione

$$(\max|\eta|)^2 \leqq \frac{\Theta\lambda_r}{4(\lambda_r-1)}\left|\int_a^b f\eta\,dx\right|,$$

si deduce, in virtù della (26), per l'integrale $y(x)$ della (1) verificante le (2_0),

$$(29)\qquad \max|y| \leqq \max|\eta| + \sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{1-\lambda_k}\frac{\max|u_k|}{\int_a^b A u_k^2\,dx}\left|\int_a^b f u_k\,dx\right|$$

$$\leqq \frac{\Theta}{4}\frac{\lambda_r}{\lambda_r-1}\Omega_{\mu\nu}[\varrho,f] + \sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{1-\lambda_k}\frac{\max u_k^2}{\int_a^b A u_k^2\,dx}\Omega_{\mu_k\nu_k}[\varrho_k,f]$$

$$\leqq \frac{\Theta}{4}\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_r-1}\Omega_{\mu\nu}[\varrho,f] + \sum_{k=0}^{r-1}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}\Omega_{\mu_k\nu_k}[\varrho_k,f]\right).$$

Si voglia ora maggiorare l'integrale $y(x)$ della (1) con le più generali condizioni terminali (2): $y(a)=\alpha$, $y(b)=\beta$. Porremo (cfr. la fine del n.° precedente)

$$(30)\qquad \begin{cases} v(x) = \dfrac{\beta}{\Theta}\displaystyle\int_a^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} - \frac{\alpha}{\Theta}\int_b^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)}, \\ y(x) = \eta(x) + v(x), \end{cases}$$

si ha:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\beta-\alpha}{\Theta}\frac{1}{\theta(x)}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dv}{dx}\right) = 0, \qquad v(a)=\alpha, \qquad v(b)=\beta,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d\eta}{dx}\right) + A\eta = f - Av, \qquad \eta(a)=\eta(b)=0,$$

e quindi:

$$(31)\qquad \max|\eta| \leqq \frac{\Theta}{4}\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_r-1}\Omega_{\mu\nu}[\varrho,f-Av] + \sum_{k=0}^{r-1}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}\Omega_{\mu_k\nu_k}[\varrho_k,f-Av_k]\right)$$

$$\leqq \frac{\Theta}{4}\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_r-1}\Omega_{\mu\nu}[\varrho,f] + \sum_{k=0}^{r-1}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}\Omega_{\mu_k\nu_k}[\varrho_k,f]\right)$$

$$+ \gamma\frac{\Theta}{4}\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_r-1}\Omega_{\mu\nu}[\varrho,A] + \sum_{k=0}^{r-1}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}\Omega_{\mu_k\nu_k}[\varrho_k,A]\right),$$

ove γ è il più grande fra i due numeri $|\alpha|$ e $|\beta|$. Si ha dunque il teorema:

IX′. *Se λ_k' e λ_k'' indicano due valori approssimati dell' autovalore λ_k, il primo per difetto ed il secondo per eccesso, e se riesce*

$$\lambda_k'' < 1 < \lambda_r' \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, r-1),$$

per l' integrale $y(x)$ verificante le (2) sussiste la seguente formula di maggiorazione

$$\text{(VIII′)} \quad \max|y| \leqq \frac{\Theta}{4}\left(\frac{\lambda_r'}{\lambda_r'-1}\,\Omega_{\mu\nu}[\varrho, f] + \sum_{k=0}^{r-1}\frac{\lambda_k''}{1-\lambda_k''}\,\Omega_{\mu_k\nu_k}[\varrho_k, f]\right)$$

$$+\gamma\,\frac{\Theta}{4}\left(\frac{\lambda_r'}{\lambda_r'-1}\,\Omega_{\mu\nu}[\varrho, A] + \sum_{k=0}^{r-1}\frac{\lambda_k''}{1-\lambda_k''}\,\Omega_{\mu_k\nu_k}[\varrho_k, A]\right) + \gamma,$$

ove: γ è il più grande fra i due numeri $|\alpha|$ e $|\beta|$, Ω è il funzionale definito dalle (27), $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{r-1}$, $\nu, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{r-1}$ sono i più arbitrarii numeri maggiori di uno, $\varrho(x), \varrho_1(x), \ldots, \varrho_{r-1}(x)$ le più arbitrarie funzioni non negative in (a, b), ivi sommabili con le potenze

$$(\varrho(x))^{-\frac{\nu}{\mu-1}},\quad (\varrho_1(x))^{-\frac{\nu_1}{\mu_1-1}},\quad \ldots,\quad (\varrho_{r-1}(x))^{-\frac{\nu_{r-1}}{\mu_{r-1}-1}}.$$

7. Maggiorazione delle derivate dell' integrale. — Nei calcoli d'approssimazione dell' integrale, per giudicare l' entità dell' errore commesso, occorrono anche numeri maggioranti le derivate esistenti dell' integrale. Ove si tenga conto dell' equazione (1) a cui l' integrale soddisfa, ci si può limitare a mostrare come si ottenga la maggiorazione della derivata prima. Se supponiamo, dapprima, che l' integrale verifichi le condizioni terminali omogenee (2_0), detto x_0 un punto dell' intervallo (a, b) nel quale riesce $y'(x_0) = 0$, seguirà dalla (1)

$$\theta\frac{dy}{dx} = -\int_{x_0}^{x} A\,y\,dx + \int_{x_0}^{x} f\,dx,$$

e pertanto

$$p\max\left|\frac{dy}{dx}\right| \leqq \max|y|\,\Omega_{\mu'\nu'}[\varrho', A] + \int_a^b |f|\,dx$$

$$\leqq \max|y|\,\Omega_{\mu'\nu'}[\varrho', A] + \Omega_{\mu''\nu''}[\varrho'', f].$$

Dalla (29) si trae dunque la desiderata maggiorazione di $\frac{dy}{dx}$.

L' integrale $y(x)$ verifichi ora le più generali condizioni terminali (2). Fatte allora le posizioni (30) si trova:

$$p \max\left|\frac{d\eta}{dx}\right| \leqq \max|\eta|\,\Omega_{\mu'\nu'}[\varrho', A] + \Omega_{\mu''\nu''}[\varrho'', f - Av]$$

$$\leqq \max|\eta|\,\Omega_{\mu'\nu'}[\varrho', A] + \Omega_{\mu''\nu''}[\varrho'', f] + \gamma\,\Omega_{\mu''\nu''}[\varrho'', A],$$

$$\max\left|\frac{dy}{dx}\right| \leqq \max\left|\frac{d\eta}{dx}\right| + \frac{|\alpha|+|\beta|}{p\,\Theta}.$$

e quindi dalla (31) si consegue ancora la maggiorazione di $\frac{dy}{dx}$.

§ 5.

Possibili estensioni delle analisi dei paragrafi precedenti.

8. Estensione alle più generali condizioni lineari imposte all'integrale. — Ai problemi che la Fisica-Matematica pone alla teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine appartiene, in prima linea, quello considerato nel paragrafo precedente, ma anche quei molti altri che possono riguardarsi, ciascuno, casi particolari del seguente [12]):

Nelle ipotesi già enunciate per le funzioni $\theta(x)$ *e* $A(x)$ *definite nell'intervallo* (a, b) *determinare un integrale dell'equazione*:

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy}{dx}\right) + A(x)\,y = f(x),$$

verificante le due condizioni lineari:

$$(2) \qquad L_i y \equiv \sum_{k=1}^{2}\left\{\sum_{l=1}^{l=m_{ik}} a_{ikl}\,y^{(k-1)}(\tau_{ikl}) + \int_a^b a_{ik}(\tau)\,y^{(k-1)}(\tau)\,d\tau\right\} = l_i \qquad (i = 1, 2),$$

ove le $a_{ik}(\tau)$ *sono funzioni reali di* τ *sommabili in* (a, b), *assegnate insieme alle quantità reali* a_{ikl} *e* l_i *e ai punti, di* (a, b), τ_{ikl} *in numero finito* $\leqq \sum_{ik} m_{ik}$.

Ebbene, se (cfr. la mia Tesi d'abilitazione, loc. cit. [1]), n.i 24, 30 e 31) si fanno le ipotesi seguenti:

1ª) che le condizioni (2) siano *simmetriche*, siano cioè tali che per due funzioni $u(x)$ e $v(x)$ che verificano entrambe le condizioni omogenee

$$(2_0) \qquad L_1 y = L_2 y = 0,$$

si abbia sempre

$$\left[\theta\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)\right]_a^b = 0;$$

[12]) Cfr. la mia Tesi d'abilitazione (loc. cit. [1])), § 6 e Nota in appendice.

2^a) che per ogni funzione $y(x)$ verificante le condizioni omogenee (2_0) si abbia, inoltre,

$$\left[\theta y \frac{dy}{dx}\right]_a^b \leqq 0;$$

è possibile la ricerca per l'estensione, delle analisi svolte nei §§ 1, 2, 3 e 4 del presente lavoro, all'ottenimento di formule maggioranti, del tipo di quelle gia trovate nel paragrafo ultimo, relative però, in generale, anzichè all'integrale della (1) verificante le condizioni (2), all'oscillazione di questo nell'intervallo (a, b).

Per tale presunzione basta considerare che:

$$(\operatorname{osc} y(x))^2 \leqq \Theta \int_a^b \theta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

e che, riconducendosi com'è sovente possibile, al caso che sia

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0,$$

se per una funzione $y(x)$ risultano verificate le (1) e (2_0), nelle enunciate ipotesi 1^a) e 2^a), si ha:

$$\int_a^b \theta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \leqq -\left[\theta y \frac{dy}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \int_a^b A y^2\, dx - \int_a^b f y\, dx,$$

$$\left|\int_a^b f y\, dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\,[y(x) - y(a)]\, dx\right| \leqq (b-a) \max |f| \operatorname{osc} y,$$

laddove, per le autosoluzioni dell'equazione

$$(1_\lambda) \qquad \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{du}{dx}\right) + \lambda A(x)\, u = 0,$$

relative alle condizioni omogenee (2_0), si ha:

$$\int_a^b A u_h u_k\, dx = 0, \qquad \int_a^b A u_k^2\, dx > 0,$$

se, per gli autovalori corrispondenti è $\lambda_h \neq \lambda_k$, $\lambda_k > 0$.

Per l'indicata estensione, che, in generale, non ritengo però immediata, considerevole profitto si dovrebbe poter trarre dai risultati dei §§ 5 e 6 della mia Tesi d'abilitazione. Per esempio, volendo maggiorare l'oscillazione dell'integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni terminali omogenee

$$y'(a) = y'(b) = 0,$$

osserviamo che, se si fa l'ipotesi

$$\int_a^b A(x)\,dx < 0, \tag{3}$$

posto

$$c = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b A(x)\,dx}, \qquad g(x) = f(x) - cA(x), \qquad y(x) = \eta(x) + c,$$

si ha

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d\eta}{dx}\right) + A\eta = g(x), \qquad \eta'(a) = \eta'(b) = 0, \qquad \int_a^b g(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^b \theta\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx = \int_a^b A\eta^2\,dx - \int_a^b g\eta\,dx. \tag{4}$$

Ora sussistendo la (3), detto λ_0 il più piccolo autovalore positivo di λ nell'equazione (1_λ) relativo alle condizioni terminali $u'(a) = u'(b) = 0$, si ha (cfr. Tesi d'abilitazione loc. cit. [1]), n.° 21)

$$\int_a^b A\eta^2\,dx \leqq \frac{1}{\lambda_0}\int_a^b \theta\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx,$$

onde, supposto $\lambda_0 > 1$, segue dalla (4)

$$\int_a^b \theta\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx \leqq \frac{-\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\int_a^b g\eta\,dx,$$

e pertanto:

$$\operatorname{osc}\eta(x) \leqq \Theta(b-a)\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\max|g|.$$

Ma

$$\operatorname{osc} y(x) = \operatorname{osc}\eta(x), \qquad \max|g| \leqq \max|f| + |c|\max|A|,$$

e si ha dunque per l'oscillazione in (a, b) dell'integrale $y(x)$ la seguente formula di maggiorazione

$$\begin{aligned}\operatorname{osc} y(x) &\leqq \Theta(b-a)\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\left(\max|f| + \max|A|\cdot\left|\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b A(x)\,dx}\right|\right) \\ &\leqq \Theta(b-a)\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\left(1 + \max|A|\,\frac{b-a}{\left|\int_a^b A(x)\,dx\right|}\right)\max|f|.\end{aligned} \tag{XII}$$

Se, ritornando alle considerazioni generali, avvenisse poi che, come conseguenza delle condizioni omogenee (2_0), ogni funzione $y(x)$ che le

soddisfi debba di necessità annullarsi, almeno una volta, nello intervallo (a, b), si avrebbe allora $\max |y(x)| \leqq \operatorname{osc} y(x)$ e quindi anche

$$(\max |y(x)|)^2 \leqq \Theta \int_a^b \theta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

e ne seguirebbero formule maggioranti non soltanto per l'oscillazione dell'integrale, ma anche per l'integrale stesso. Così, per esempio, si vede che le formule (V) e (VIII) del § 4, maggioranti l'integrale $y(x)$ della (1) verificante le condizioni omogenee $y(a) = y(b) = 0$, sussistono anche, purchè se ne quadrupli il secondo membro e vi si cangi corrispondentemente il significato degli autovalori, per l'integrale verificante la coppia di condizioni omogenee,

$$y(a) = 0, \quad y(b) + \gamma y'(b) = 0,$$

oppure l'altra

$$y(a) - \gamma y'(a) = 0, \quad y(b) = 0,$$

γ designando una costante non negativa.

9. Estensione alle equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore. — Sia $y(x)$ una funzione, definita nell'intervallo (a, b), ivi continua con le sue derivate fino a quella inclusa d'ordine n, detto c un punto di (a, b), si indicherà con $P_n(x, c)$ il polinomio di grado n che ha nel punto c un contatto d'ordine $n+1$ almeno, con la funzione $y(x)$, si porrà cioè

$$P_n(x, c) = y(c) + \frac{y'(c)}{1!}(x - c) + \ldots + \frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Per ogni punto c si consideri il massimo in (a, b) del modulo della differenza

$$y(x) - y(c) - \frac{y'(c)}{1!}(x - c) - \ldots - \frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n,$$

esso si chiamerà il *massimo scarto d'ordine n della funzione* $y(x)$, *relativo al punto* c, e si indicherà con la notazione

$$\max \operatorname{scarto}_c^{(n)} y(x).$$

L'estremo superiore in (a, b), di tale massimo scarto si chiamerà l'*oscillazione d'ordine n della funzione* $y(x)$ e si indicherà con la notazione

$$\operatorname{osc}^{(n)} y(x).$$

Evidentemente, se in un punto c sono nulle le derivate di $y(x)$ degli ordini $k+1, k+2, \ldots, n$, si ha

$$\max \operatorname{scarto}_c^{(k)} y(x) = \max \operatorname{scarto}_c^{(n)} y(x),$$

e se nel punto c risulta $y(c) = y'(c) = \ldots = y^{(n)}(c) = 0$, si ha

$$\max \text{scarto}_c^{(k)}\, y(x) = \max |y(x)| \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Si ha poi

$$\text{osc}^{(0)}\, y(x) = \text{osc}\, y(x).$$

Sussiste la proposizione:

XV. *Se la funzione $y(x)$ è continua in (a, b) con le sue derivate fino a quella inclusa d'ordine n, la quale ultima è assolutamente continua e dotata di numeri derivati di quadrato sommabile, si ha*:

$$(5) \quad (\max \text{scarto}_c^{(n)}\, y(x))^2 \leqq (\text{osc}^{(n)}\, y(x))^2 \leqq \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)(n!)^2} \int_a^b \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)^2 dx.$$

Ed invero, se $x > c$,

$$(y(x) - P_n(x, c))^2 = \left(\int_c^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{d^{n+1}y}{d\xi^{n+1}} d\xi\right)^2 \leqq \int_c^x \frac{(x-\xi)^{2n}}{(n!)^2} d\xi \int_c^x \left(\frac{d^{n+1}y}{d\xi^{n+1}}\right) d\xi.$$

Nell'ipotesi, per esempio, che la funzione $y(x)$ verifichi le condizioni

$$(6) \quad \begin{cases} y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(n)}(a) = 0, \\ y(b) = y'(b) = \ldots = y^{(n)}(b) = 0, \end{cases}$$

il fattore dell'integrale al secondo membro della (5) può essere sostituito con altro molto più piccolo, laddove il primo membro può essere sostituito con $(\max |y|)^2$.

Ed invero, verificandosi le (6), detto c un punto di (a, b) ove il modulo di $y(x)$ consegue il suo massimo M, si ha, per la (5),

$$\int_a^c \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)^2 dx \geqq M^2 \frac{(2n+1)(n!)^2}{(c-a)^{2n+1}}, \qquad \int_c^b \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)^2 dx \geqq M^2 \frac{(2n+1)(n!)^2}{(b-c)^{2n+1}},$$

e quindi

$$\int_a^b \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)^2 dx \geqq M^2 (2n+1)(n!)^2 \left(\frac{1}{(c-a)^{2n+1}} + \frac{1}{(b-c)^{2n+1}}\right),$$

ma

$$\frac{1}{(c-a)^{2n+1}} + \frac{1}{(b-c)^{2n+1}} \geqq \frac{2^{2n+2}}{(b-a)^{2n+1}}$$

e si ha pertanto:

XVI. *Se la funzione $y(x)$ è continua in (a, b), con le sue derivate fino a quella inclusa d'ordine n, la quale ultima è assolutamente con-*

tinua e dotata di numeri derivati di quadrato sommabile, dal verificarsi delle (6) *si deduce che*:

$$(7) \qquad (\max|y|)^2 \leqq \frac{(b-a)^{2n+1}}{4(2n+1)[(2n)!!]^2} \int_a^b \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)^2 dx,$$

ove $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)$.

Ciò premesso, data la più generale equazione differenziale lineare ordinaria autoaggiunta d'ordine $2n$, ponendosi nello stesso indirizzo d'analisi del § 4, si possono ricercare formule maggioranti dell'integrale o di un suo massimo scarto o della sua oscillazione di ordini determinati, quando all'integrale sia prescritto di soddisfare assegnate condizioni lineari atte, in generale, a determinarlo. Per estendere le formule generali del n.° 5 del § 4, bisogna però dapprima stabilire opportune proprietà di minimo delle autosoluzioni relative al problema, analoghe a quelle ricordate al § 3 per le equazioni del 2° ordine, e ciò non è stato ancora fatto.

La particolare formula (III) di maggiorazione (n.° 2 del § 4) si estende immediatamente, per esempio, all'equazione autoaggiunta d'ordine $2n+2$:

$$(8) \qquad \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\theta \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right) + A(x)y = f(x),$$

per la quale si suppone sempre $\min \theta(x) = p > 0$, quando all'integrale $y(x)$ siano prescritte le condizioni terminali omogenee (6). Moltiplicando ambo i membri della (8) per $y(x)$ e integrando fra a e b, si ricava, mediante successive integrazioni per parti,

$$\int_a^b \theta \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)^2 dx + (-1)^{n+1} \int_a^b A y^2 dx = (-1)^{n+1} \int_a^b f y\, dx,$$

e quindi, detto M un numero non negativo, non superato dal massimo in (a, b) di $(-1)^n A(x)$, si ha la disuguaglianza

$$p \int_a^b \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)^2 dx - M(\max|y|)^2(b-a) \leqq (b-a)\max|f|\max|y|,$$

donde, in base alla (7),

$$\frac{4(2n+1)[(2n)!!]^2}{(b-a)^{2n+1}}\, p\, (\max|y|)^2 - M(\max|y|)^2(b-a) \leqq (b-a)\max|f|\max|y|,$$

e pertanto:

XVII. *Nell'ipotesi che riesca*:

$$4(2n+1)[(2n)!!]^2 \min\theta(x) - (b-a)^{2n+2} \max[(-1)^n A(x)] > 0,$$

per l'integrale $y(x)$ *della* (6) *verificante le condizioni terminali omogenee* (6) *sussiste la seguente formula di maggiorazione*:

$$\text{(XIII)} \qquad \max|y| \leqq \frac{(b-a)^{2n+2} \max|f|}{4(2n+1)[(2n)!!]^2 p - (b-a)^{2n+2} M}$$

ove $p = \min\theta(x)$ *e* M *è lo zero se* $(-1)^n A(x)$ *è non positivo in* (a, b) *ed è il massimo di* $(-1)^n A(x)$ *nell'altro caso.*

In particolare, per l'equazione di quart'ordine:

$$\text{(9)} \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(\theta \frac{d^2 y}{dx^2}\right) + A(x)\, y = f(x),$$

nell'ipotesi che riesca:

$$48 \min\theta(x) + (b-a)^4 \min A(x) > 0,$$

per l'integrale $y(x)$ verificante le condizioni terminali

$$\text{(10)} \qquad y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0,$$

sussiste la seguente formula di maggiorazione:

$$\max|y| \leqq \frac{(b-a)^4 \max|f|}{48p + (b-a)^4 m},$$

ove m è lo zero se $A(x)$ è non negativa in (a, b) ed è il minimo di $A(x)$ nell'altro caso.

Il coefficiente dell'integrale al secondo membro della (7) è però suscettibile d'essere notevolmente ridotto e ciò porta ad una vantaggiosa riduzione del numero maggiorante l'integrale della (8) verificante le (6), nonchè ad una maggiore latitudine nella variazione dei coefficienti dell'equazione. Per esempio, nelle solite ipotesi per la funzione $y(x)$, se essa verifica le condizioni (10), si trova che:

$$(\max|y|)^2 \leqq \frac{(b-a)^3}{192} \int_a^b \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx,$$

non potendo però il coefficiente numerico essere ulteriormente ridotto. Si ha dunque:

XVIII. *Se riesce*

$$192 \min\theta(x) + (b-a)^4 \min A(x) > 0,$$

per l'integrale $y(x)$ *della* (9) *verificante le* (10) *si ha*:

$$\max|y| \leqq \frac{(b-a)^4 \max|f|}{192p+(b-a)^4 m}.$$

Un ulteriore perfezionamento alle formole maggioranti si può arrecare generalizzando le considerazioni del n° 3. Si trova così, in particolare, per le funzioni $y(x)$ verificanti le (10),

$$(\max|y|)^2 \leqq \Theta \int_a^b \theta \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx,$$

essendo $\frac{1}{\Theta}$ il minimo in (a, b) della funzione di c:

$$\frac{\int_a^c \frac{dx}{\theta(x)}}{\int_a^c \frac{dx}{\theta(x)} \int_a^c \frac{x^2}{\theta(x)} dx - \left(\int_a^c \frac{x}{\theta(x)} dx\right)^2} + \frac{\int_c^b \frac{dx}{\theta(x)}}{\int_c^b \frac{dx}{\theta(x)} \int_c^b \frac{x^2}{\theta(x)} dx - \left(\int_c^b \frac{x}{\theta(x)} dx\right)^2},$$

laddove, se $\theta(x)$ non è costante, riesce $\Theta < \frac{(b-a)^3}{192p}$. Un perfezionamento del teor. XVIII è dunque dato dal seguente:

XVIII'. *Se riesce*

$$1+(b-a)\Theta \min A(x) > 0$$

per l'integrale $y(x)$ *della* (9) *verificante le* (10) *si ha*:

$$\max|y| \leqq \frac{\Theta(b-a)\max|f|}{1+\Theta(b-a)m}.$$

10. Estensione alle equazioni integrali e alle equazioni alle derivate parziali. Agli speciali procedimenti di maggiorazione indicati in ciò che precede si può fare la critica [13]) che la loro validità è limitata alle equazioni differenziali ordinarie. Ora nelle applicazioni alla Fisica importa anche avere formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni alle derivate parziali; di queste se ne trovano già nella citata mia nota dei Lincei (loc. cit. [2])) per le equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine del tipo ellittico-parabolico in quante si vogliano variabili indipendenti e di altre, nello stesso indirizzo di ricerca, sono già in possesso per le equazioni *totalmente* paraboliche [14]). Con ciò però non

[13]) F. Tricomi, *Limitazione delle soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali* [Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei 5 della serie 6ª (1° sem. 1927, pp. 95–99].

[14]) Saranno oggetto di una prossima comunicazione alla R. Accademia Nazionale dei Lincei.

si consegue ancora la necessaria generalità. Per raggiungere tale intento io penso che convenga collegare il problema al contorno che si considera, relativo ad un' equazione differenziale lineare, sia essa ordinaria o alle derivate parziali, con un' equazione integrale di seconda specie:

$$\varphi(P) = \lambda \int_T K(P, Q)\varphi(Q)\,dT(Q) + f(P), \tag{11}$$

ed il migliore profitto si dovrebbe trarre sfruttando, specialmente, anche per il particolare nostro scopo di maggiorare con numeri facilmente calcolabili, le note idee per quel collegamento dovute a Eugenio Elia Levi [15]).

Detto $K_n(P, Q)$ l' n^{mo} nucleo iterato dedotto dal nucleo $K(P, Q)$, e posto $K_0(P, Q) = K(P, Q)$, se nel dominio T e per un certo valore di $n\,(\geqq 0)$ riesce:

$$1 - |\lambda|^{n+1} \int_T |K_n(P, Q)|\,dT(Q) > 0,$$

oppure

$$1 - |\lambda|^{n+1} \sqrt{\text{mis}\,T} \sqrt{\int_T K_n^2(P, Q)\,dT(Q)} > 0,$$

si ha, ovviamente, per la soluzione $\varphi(P)$ della (11),

$$|\varphi(P)| \leqq \frac{\left| f(P) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{i+1} \int_T K_i(P, Q) f(Q)\,dT(Q) \right|}{1 - |\lambda|^{n-1} \int_T |K_n(P, Q)|\,dT(Q)},$$

oppure

$$|\varphi(P)| \leqq \frac{\left| f(P) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{i+1} \int_T K_i(P, Q) f(Q)\,dT(Q) \right|}{1 - |\lambda|^{n+1} \sqrt{\text{mis}\,T} \sqrt{\int_T K_n^2(P, Q)\,dT(Q)}},$$

e queste formule immediate conducono già alla maggiorazione, in casi particolari degni di nota, degli integrali di equazioni differenziali, ordinarie o alle derivate parziali, verificanti determinate condizioni al contorno.

Nelle condizioni più generali, la formula di maggiorazione della soluzione $\varphi(P)$ della (11) è del tipo (cfr. la formula (VII) del n.° 3, § 4)

$$\max |\varphi(P)| \leqq \left(\frac{A}{(\lambda - \lambda_r)^{k_r}} + \frac{B}{(\lambda_{r+1} - \lambda)^{k_{r+1}}} \right) \max |f(P)|,$$

---

[15]) E. E. Levi, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) **16** della serie 3ª (1909), pp. 1–112]. Giova anche consultare i *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen di D. Hilbert* [B. G. Teubner, Leipzig und Berlin (1912)] Kap. XVIII.

ove λ_r e λ_{r+1} rappresentano gli autovalori reali del parametro λ nell' equazione (9), più prossimi al valore di λ che si considera e per i quali riesce:

$$\lambda_r < \lambda < \lambda_{r+1},$$

avendo designato con k_r e k_{r+1} gli ordini di molteplicità di λ_r e di λ_{r+1}. Considerando dunque un problema al contorno relativo ad un' equazione differenziale ordinaria o alle derivate parziali, che sia stato collegato con l' equazione integrale (9), si tratta appunto di conseguire un calcolo semplice per le quantità A, B, λ_r e λ_{r+1} approssimato per eccesso per le A, B, λ_r e per difetto per la λ_{r+1}.

Napoli, 20 giugno 1927.

(Eingegangen am 24. Juni 1927.)

Über den Schnitt zweier Sphären im R_3.

Von

Robert Furch in Rostock.

§ 1.

Erklärungen.

Unter einer *Sphäre* verstehen wir ein topologisches Bild der Kugelfläche, unter einem *Ringstreifen* dasjenige der ebenen Punktmenge $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2$. Mit El.Fl.St. bzw. El.R.St. kürzen wir die Worte Elementarflächenstück bzw. Elementarraumstück ab.

In einem den Operationsbereich enthaltenden El.R.St. des euklidischen R_3 [1]) sind gegeben die *Metrik* M_I und die *Metrik* M_{II}. Sie definieren, was wir zu verstehen haben unter M_I- bzw. M_{II}-Strecken, M_I-Ebenen-(stücken) usw. — Unter einer M_I-*Sphäre* sei eine Sphäre verstanden, welche aus Zellen aufgebaut ist, die im Sinn von M_I ebenflächig sind. Eine solche berandet daher ein El.R.St. und gestattet in ihrem Innern (und auch in ihrer Außenumgebung) die Konstruktion von *„parallelen Sphären"* (indem — nach einer Abbildung des Innern auf eine Vollkugel — mit dem Rand konzentrische Kugeln konstruiert und rückwärts abgebildet werden). Ein M_I-*El.Fl.St.* ist ein auf einer M_I-Sphäre gelegenes El.Fl.St.

Vielfach benutzen wir die M_I-*Approximation*: Von ihr sprechen wir bei Betrachtung eines im R_3 liegenden, eindeutigen und stetigen Abbilds Ω einer Sphäre. Nach deren Triangulierung sollen zwei Bilder von Dreiecksecken nicht zusammenfallen, wenn sie zum selben Dreieck gehören. Gegebenenfalls ist dies durch geringe räumliche Verschiebungen der Eckpunktsbilder und ihrer Umgebungen zu erzwingen. In die Eckpunktsbilder eines jeden Dreiecks spannen wir ein im Sinne der M_I-Metrik gewöhnliches, ebenes Dreieck ein. Diese Dreiecke schließen sich längs M_I-Strecken nach dem sphärischen Triangulierungsschema zusammen, durchdringen und bedecken sich aber i. a. mannigfach gegenseitig. Durch er-

[1]) Im euklidischen R_3 ist die Sprechweise bequemer als im sphärischen S_3.

neute kleine Lageänderungen bewirken wir, daß zwei Dreiecke nur eine Strecke gemein haben. Auf den so entstehenden Komplex Δ wenden wir an das *Lemma von Dehn*[2]):

„Begrenzt eine Kurve k auf einem Flächenkomplex im R_3 ein El.Fl.St. ohne Randsingularitäten, so begrenzt k im R_3 auch ein völlig singularitätenfreies El.Fl.St. E."

E wird dabei so bestimmt, daß zuerst nur „Umschaltungen" längs der Durchdringungsstrecken und alsdann nur beliebig kleine Lageveränderungen in ihrer Umgebung vorgenommen werden. — Auf unsern Komplex Δ wenden wir das Lemma an, indem wir eine kleine Kreisscheibe in der Umgebung eines regulären Punkts wegnehmen, um ein Dehn'sches El.Fl.St. zu erhalten und nach der gesamten Regularisierung wieder zufügen. *Wir erhalten so aus Ω eine M_I-Sphäre.*

An Stelle der üblichen metrischen Definition der „Ordnung" eines Punkts in bezug auf eine Kurve führen wir die topologischen Definitionen ein: Eine geschlossene stetige Kurve k auf einer Sphäre S soll zu zwei S-Punkten P_1, P_2 fremd sein. Mit berandender Jordankurve nehmen wir zwei P_1 bzw. P_2 enthaltende, zu k fremde Umgebungen von S weg, es bleibt ein Ringstreifen, dessen einer Rand j sei. k ist im Streifen homotop zu einer Potenz γ von j, geschrieben $k \equiv j^\gamma$. Wir nennen γ die *Ordnung von k auf S in bezug auf das Punktepaar.* Ist $k \equiv j^1$, so sagen wir auch, k sei ein (Einzel-) *Umlauf zwischen P_1 und P_2.* — Während zunächst kein Anlaß vorliegt γ ein Vorzeichen zu erteilen, kann dies durch Orientierung von k und j geschehen. — Wenn bei einer stereographischen Projektion des Kugelbilds von S auf die Ebene der Punkt P_2 ins Unendliche fällt, kommen wir zu dem gewöhnlichen Ordnungsbegriff[3]). Wir kommen so zur Definition der *Ordnung γ von k auf dem El.Fl.St. E in bezug auf einen Punkt* und zur Definition des *(Einzel)-Umlaufs* um *P auf E.*

§ 2.

Inhaltsübersicht.

Es werden behandelt einige zur *allgemeinen* Topologie gehörige Probleme; zuerst eine einfache Bemerkung, welche in Analogie steht zu der Zerlegung von einfach zusammenhängenden, zweidimensionalen Gebieten durch Querschnitte:

Satz I. *„Jedes der Gebiete $\mathfrak{H}$, welche auf der M_I-Sphäre H von einer schneidenden M_{II}-Sphäre S bestimmt werden, mit andern Worten:*

[2]) M. Dehn, Über die Topologie des dreidimensionalen Raums, Math. Annalen 69, S. 147.

[3]) Vgl. z. B. v. Kerékjártó, Topologie I, Berlin 1923, S. 83ff. (gewöhnlich spricht man von der Ordnung eines Punkts *in bezug auf die Kurve.*

jede Komponente $\mathfrak{H}$ *der im Innern (oder Äußern) von S gelegenen H-Menge zerlegt das Innere (Äußere) von S in genau zwei Gebiete.*"

Vor allem handelt es sich um

Satz II. „*Gegeben eine* M_I- *bzw.* M_{II}-*Sphäre H bzw. S. Zwei nicht zu H gehörige S-Punkte A, B mögen im Innern (oder im Äußern) von S durch ein Gebiet* $\mathfrak{H}$ *getrennt werden* (Satz I). *Dann gibt es mindestens ein, der Schnittmenge* $(H \times S)$ *angehörendes ‚Übergangskontinuum'* $\mathfrak{K}$, *so daß innerhalb einer hinreichend kleinen* $\mathfrak{K}$*-Umgebung durch Deformation die Einzelumläufe* k_s *auf S zwischen A und B übergehen wiederum in Einzelumläufe* k_h *auf H zwischen gewissen Punkten*[4]) *X und Y — und dasselbe in umgekehrter Richtung.*

Diese $\mathfrak{K}$ *sind gewisse Randstücke*[5]) *von* $\mathfrak{H}$. *Insbesondere kann zu jedem durch H getrennten S-Punktepaar A, B ein* $\mathfrak{K}$ *gefunden werden.*"

Aus dem Beweis sei erwähnt, daß in § 6 davon gesprochen wird, inwiefern von singulärem Charakter der in $(H \times S)$ enthaltenen Kontinua $\mathfrak{K}$ gesprochen werden kann, insofern nämlich eine Art Berührung von S mit H eintritt. — Zur Vervollständigung von Satz II dient:

Satz III. „*Jedes auf H mehr als ein Gebiet bestimmende Randstück der einzelnen Gebiete* $\mathfrak{H}$ *kann bei passender Wahl von A, B als Übergangskontinuum angesprochen werden.*"

Eine Anwendung von Satz II und zugleich Beweismittel für Satz III ist

Satz IV[6]). a) „*Begrenzt eine Sphäre ein El.R.St., das im Innern eine abgeschlossene Punktmenge G enthält, so kann sie von G durch eine M-Sphäre getrennt werden (Metrik M vorgeschrieben).*"

Dabei genügt es zu zeigen

b) „*Zwei sich nicht schneidende* M_{II}*-Sphären* S_1 *und* S_2 *können durch eine* M_I*-Sphäre K getrennt werden.*"

Als eine — in einer folgenden Arbeit zu behandelnde — Anwendung der vorgelegten Methoden und Sätze ist hier zu erwähnen der Beweis des Satzes: „Hat jeder Punkt einer Sphäre im R_3 an der Innenseite derselben eine einfach zusammenhängende Umgebung, so begrenzt diese Sphäre ein El.R.St." oder was dasselbe ist: „Das Gebiet zwischen zwei sich nicht schneidenden Sphären dieser Art (im sphärischen S_3) ist homöomorph zur Hohlkugel"[6]).

---

[4]) Die nicht von k_h abhängen.

[5]) D. h. Stücke des Rands von $\mathfrak{H}$; zum Begriff des „Stücks" vgl. v. Kerékjártó, a. a. O. S. 47.

[6]) Vgl. meine Arbeit Hamb. Abh. III, S. 79ff., Anm. 7, vgl. auch Schluß des § 2 der vorliegenden Arbeit.

§ 3.

Auffindung der Übergangskontinua. Die Kurven k_h und k_s.

Vorgegeben ist ein Gebiet $\mathfrak{H}$ (Satz I), nicht aber A und B. Wir beschreiben

1. *die Konstruktion eines gewissen geschlossenen Wegs w und w_I:*

$\mathfrak{H}$ liege innerhalb S, enthalte einen Punkt X und heiße $\mathfrak{H}_x$. Auch ohne zu wissen, daß $\mathfrak{H}_x$ das S-Innere in zwei[7]) Gebiete teilt, können wir, von den zwei verschiedenen H-Ufern in X ausgehend, die Wege $w_a = XA$ und $w_b = XB$ nach zwei verschiedenen, nicht zu H gehörenden S-Punkten A, B hinführen, so daß $w_a + w_b$ *mit* $\mathfrak{H}_x$ *nur* X, *mit* S *nur* A *und* B *gemein* hat[8]). Ein Weg w_c verbinde A und B im S-Äußern. Dabei soll der geschlossene Weg $w = w_a + w_b + w_c$ zur Kreislinie homöomorph sein und H *nur endlich oft durchsetzen.* — Führen wir w durch kleine Deformation in einen geschlossenen Zug von M_I-Strecken über, ohne Lage und Zahl $2m$ der Schnitte mit H zu ändern, so entsteht w_I.

2. *das Auffinden gewisser „Übergangskontinua“:*

X wird auf H von den $2m-1$ andern Schnittpunkten $(w \times H)$ durch endlich viele Randstücke[5]) $\mathfrak{K}_j$ des Gebiets $\mathfrak{H}_x$ getrennt. Approximiere diese $\mathfrak{K}_j$ durch paarweis punktfremde Polygone π_j, so daß X von $\mathfrak{K}_j$ durch π_j getrennt wird. Das von π_j auf H begrenzte, $\mathfrak{K}_j$ enthaltende El.Fl.St. ε_j enthält $n_j (> 0)$ Punkte von $(w \times H)$. Im Bereiche $(H - \sum \varepsilon_j)$ liegt außer X kein Punkt von $(w \times H)$. Es ist $\sum n_j = 2m - 1$. Daher *enthält mindestens eines der* ε_j, z. B. ε, *eine ungerade Anzahl von Punkten von* $(w \times H)$, deren einen wir mit Y bezeichnen. Das in ε liegende, vom zugehörigen π approximierte $\mathfrak{K}$ nennen wir ein *„Übergangskontinuum“*. Die Umgebung von $\mathfrak{K}$, in welcher laut Satz II die Deformationen der Kurven k erlaubt sein sollen, beschränken wir so, daß sie zu w und w_I fremd ist. Die Deformation einer hinreichend nahe bei $\mathfrak{K}$ auf H gelegenen geschlossenen stetigen Kurve k_h in eine solche k_s auf S kann etwa so ausgeführt werden: Abbildung von S nebst Innenraum und Außenumgebung auf Vollkugel nebst angrenzendem Raum, radiale Projektion von k_h nach S, Rückwärtsabbildung.

Hilfssatz *über eine Eigenschaft der deformierten Kurven*: *Es ist* $\gamma \neq 0$.

Wir führen den Umlauf k_h zwischen X und Y in eine geschlossene

---

[7]) Höchstens zwei Gebiete sind es entsprechend den zwei Ufern von H.

[8]) Wegen der Schlußbemerkung in Satz II sei betont, daß A und B nicht *notwendig* von H getrennt werden.

stetige Kurve k_s auf S über und behaupten, k_s *hat auf* S *in bezug auf* A, B *eine Ordnung* $\gamma \neq 0$.[9])

Beweis. Andernfalls ließe sich k_s auf S, ohne A oder B zu überschreiten, in einen Punkt zusammenziehen. Das Deformationsgebiet dieser Kontraktion würde das stetige, zu w_I fremde Bild η eines El.Fl.St., mit k_s als Rand, sein. Das zu k_h homotope Polygon π (siehe Ziffer 2) berandet das eine ungerade Anzahl von Punkten des Wegs w_I enthaltende El.Fl.St. ε. Das Deformationsgebiet von π über k_h nach k_s ist das stetige, zu w_I fremde Bild δ eines Ringstreifens.

$\Omega = \delta + \varepsilon + \eta$ ist das stetige Bild einer Sphäre, welches wir bei genügend feiner M_I-Approximation in eine M_I-Sphäre K' derart überführen können, daß in der Umgebung von w_I keine Veränderung eintritt. Man beachte hierbei, daß i. a. das M_I-El.Fl.St. ε mannigfach von δ und η durchsetzt wird. Es würde nun die singularitätenfreie Sphäre K' in einer ungeraden Zahl von Punkten von dem geschlossenen M_I-Streckenzug w_I durchsetzt, was unmöglich ist.

§ 4.

Beweis von Satz I. Auswahl der Punkte A und B.

Der Beweis von Satz I folgt unmittelbar aus § 3: Würde das Gebiet $\mathfrak{H}_x$ das S-Innere nicht in zwei[7]) Gebiete („Seiten") zerlegen, so könnte man w_a und w_b, von den verschiedenen H-Ufern in X herkommend, nach beliebig benachbarten Punkten A, B führen, die also durch k_s gewiß nicht getrennt würden. Dies widerspricht dem Hilfssatz in § 3 ($\gamma \neq 0$).

Die *Auswahl der* S*-Punkte* A, B ist demnach insofern eingeschränkt, als A, B zu verschiedenen „Seiten" wenigstens eines Gebiets $\mathfrak{H}$ liegen müssen, damit die Konstruktion von w und $\mathfrak{K}$ möglich wird[10]) (§ 3, 1). Wir zeigen, daß diese Bedingung immer erfüllt wird bei zwei auf verschiedenen Seiten von H liegenden S-Punkten (siehe Schlußbemerkung in Satz II), indem wir widerlegen, daß A und B auf derselben „Seite" eines *jeden* Gebiets $\mathfrak{H}$ liegen könne und doch von H getrennt werde: In der Tat, sonst könnten wir den Durchschnitt aller, zu den verschiedenen $\mathfrak{H}$ gehörenden, das Punktepaar enthaltenden „Seiten" betrachten. Der Durchschnitt dieser Raumgebiete muß zusammenhängend sein, denn er läßt sich auch dar-

---

[9]) Dies bedeutet eine gewisse Invarianz der „Umlaufszahl" von k in bezug auf w. Um eine solche Umlaufszahl zu definieren, benötigt man sonst die Existenz eines Schlauchs, welcher entlang der umkreisten Kurve w eine Volltorusumgebung abgrenzt.

[10]) Es kann offenbar *jedes* von $\mathfrak{H}_x$ getrennte S-Punktepaar gewählt werden.

stellen als Durchschnitt einer Folge $G_1, G_2, \ldots$ von Gebieten, deren jedes im vorangehenden enthalten ist[11]). Es könnte also A von B nicht durch $\sum \mathfrak{H}_i$ oder durch H getrennt werden.

§ 5.

Beweis von Satz II für einen besondern Fall.

Wir betrachten die Deformation der in Satz II genannten Kurven k wieder erst in der Richtung $k_h \to k_s$, nehmen also an, daß die Ordnung von k_h auf H in bezug auf X, Y gleich 1 sei, und fragen nach der Ordnung γ von k_s in bezug auf A, B. Aus § 3 folgt bei geeigneter Orientierung $\gamma > 0$; hier ist zu zeigen, daß $\gamma = 1$ ist unter der besonderen *Annahme, daß das Übergangskontinuum* $\mathfrak{K}$ *eine geschlossene Kurve im Sinn von Schönflies ist*, d. h. daß $\mathfrak{K}$ auf H (und folglich auch auf S [12])) genau zwei Gebiete bestimmt. Wir gestalten den Beweis so, daß er im wesentlichen eine Übertragung auf den allgemeinen Fall gestatten wird.

1. *Konstruktion gewisser ringförmiger Operationsbereiche* U^3 *und* T^2:

a) Ebenso wie bei der Definition der Ordnung einer Kurve auf S in bezug auf A und B, legen wir auf S um diese Punkte je eine, nach Bedarf kleine Jordankurve s_a bzw. s_b. Zwischen s_a und s_b ist jede geschlossene stetige Kurve $\equiv s^\gamma$. Gestützt auf die Metrik M_{II} legen wir um diesen Ringstreifen eine zu A, B, w, w_I fremde Umgebung U^3, homöomorph zum Innern des Torus, und es ist in dem Deformationsbereich U^3 wiederum jede geschlossene Kurve $\equiv s^\gamma$.

b) Analog schließen wir auf H die geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$ in einen Ringstreifen ein, indem wir von beiden Seiten her $\mathfrak{K}$ durch ein Polygon h_x bzw. h_y approximieren, derart, daß der Zwischenstreifen T^2 ganz zu U^3 gehört. Dieser Streifen T^2 trennt die Schnittpunkte $(w \times H)$ ebenso wie $\mathfrak{K}$ es tut[13]). Jede zwischen h_x und h_y gelegene geschlossene stetige Kurve k_h ist $\equiv h^\lambda$. Dabei kann — wie das im folgenden durchweg geschehen soll — das Homotopiezeichen auch mit Bezug auf den Deformationsraum U^3 verstanden werden[14]).

---

[11]) Die Menge der fremden Gebiete $\mathfrak{H}$ auf H ist abzählbar: $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$ und der Durchschnitt der n ersten „Seiten" ist im Durchschnitt der $(n-1)$ ersten enthalten und zusammenhängend.

[12]) Vgl. L. E. J. Brouwer, Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve, Math. Annalen **72**, S. 422.

[13]) Wäre $\mathfrak{K}$ *nicht* der Rand von genau zwei Gebieten, so wäre diese Konstruktion nicht möglich; die Umgebung von $\mathfrak{K}$ wäre mit der erforderlichen „Schmalheit" i. a. nur bei höherem Zusammenhang (als dem des Ringstreifens) herzustellen und sie würde die durch $\mathfrak{K}$ von X getrennten Punkte von $(w \times H)$ i. a. *in mehrere Gruppen* trennen.

[14]) Weil in U^3 gilt $h^1 \equiv s^\varrho$.

2. Beweis für die Behauptung: $\gamma = 1$. Eine kleine Deformation in U^3 gemäß § 3, 2 bringt $k_h \equiv h^1$ in die Lage $k_s \equiv s^{\gamma_s}$ $(\gamma_s > 0)$. k_s enthält einen einmaligen positiven Umlauf p_s zwischen A und B, dessen zusammenfallendem Anfangs- und Endpunkt Q auf k_h zwei beliebig benachbarte Originalpunkte Q_1 und Q_2 entsprechen, wenn k_h nahe genug bei $\mathfrak{K}$ lag. Durch beliebig kleine Deformation von k_h in T^2 erreichen wir das Zusammenfallen von Q_1 und Q_2, so daß dem Umlauf p_s in T^2 eine geschlossene stetige Kurve $p_h \equiv p_s$ entspricht. Es sei $p_h \equiv h^{\gamma_h}$.[15]) Dann ist $k_h \equiv k_s \equiv p_s^{\gamma_s} \equiv p_h^{\gamma_s} \equiv h^{\gamma_h \cdot \gamma_s}$, weil aber k_h auch $\equiv h^1$ und $\gamma_s > 0$ war, folgt $\gamma_h = \gamma_s = 1$, w. z. b. w.

Bemerkung. Da jede hinreichend kleine Umgebung von $\mathfrak{K}$ in U^3 liegt, ist die Fassung des Satzes II, welche die Deformationen $k_h \rightleftarrows k_s$ auf eine gewisse Umgebung von $\mathfrak{K}$ beschränkt, berechtigt. — Nach obigem bestehen auch hinsichtlich der Deformationen $k_s \to k_h$ keine Schwierigkeiten mehr.

§ 6.

Allgemeiner Beweis von Satz II.

Ist $\mathfrak{K}$ *keine geschlossene Kurve*, so daß also $\mathfrak{K}$ unbegrenzt viele Gebiete auf H und S bestimmen kann, so greifen wir auf die Lage von $\mathfrak{K}$ im Raum zurück: Die Sphäre S, welche $\mathfrak{K}$ trägt, berandet ein El.R.St., so daß wir nach § 1 eine hinreichend nahe (s. u.) *„parallele“* (s. § 1) *Sphäre* S' im Innern zeichnen können. Bei geeigneter Wahl von w wird auch S' in genau zwei Punkten A', B' von w durchsetzt, der Punkt X gehört einem in $\mathfrak{H}_x$ gelegenen, von S' auf H bestimmten Gebiete $\mathfrak{H}_x'$ an, welches durch ein Randstück $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ getrennt wird. Die Methode § 3, 2 zeigt, daß auch $\mathfrak{K}'$ ein Übergangskontinuum ist und daß X auch durch $\mathfrak{K}'$ von Y getrennt wird. Es braucht nun zwar $\mathfrak{K}'$ nicht eine geschlossene Kurve zu sein, aber es läßt sich S' so nahe an S heranrücken, *daß* $\mathfrak{K}'$ *in einen beliebig „schmalen“* (s. Konstr.) *Streifen vom Zusammenhang des Ringstreifens eingeschlossen werden kann*; die von $\mathfrak{K}'$ auf H bestimmten Gebiete weisen dann — bis auf zwei von ihnen — keinen Innenpunkt mit einer Randentfernung $> \varrho$ auf. Zum Nachweis dieses quasisingulären Charakters des Kontinuums $\mathfrak{K}$ (dieser Charakter entspricht einer Art Berührung von S und H) brauchen wir den

Hilfssatz: „Jedes Randstück $\mathfrak{K}$ des Gebietes $\mathfrak{H}$ läßt sich *innerhalb* von $\mathfrak{H}$ durch ein Polygon Π approximieren, welches sich um nicht mehr als $\frac{3}{2}\mu$ von $\mathfrak{K}$ entfernt“[16]).

---

[15]) Dieser Schluß wäre wieder unmöglich, wenn $\mathfrak{K}$ keine geschlossene Kurve wäre.

[16]) Man muß also zunächst auf H eine Flächenmetrik einführen. Es ist klar, daß dann der entsprechende Satz für eine räumliche Metrik, z. B. M_I, gültig bleibt.

Beweis. Alle um mehr als $\frac{3}{2}\mu$ von $\mathfrak{K}$ entfernten $\mathfrak{H}$-Punkte sind in einem Polygon π enthalten, das $\mathfrak{K}$ „im mittleren Abstand μ approximiert“[17]), aber i. a. die andern Randstücke von $\mathfrak{H}$ scheidet. Das von π und den von ihm geschnittenen Randstücken gebildete Kontinuum P, welches mit $\mathfrak{K}$ nicht zusammenhängt, kann innerhalb $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{K}$ getrennt werden[18]) durch ein Polygon Π, w. z. b. w.

Auf Grund dieses Hilfssatzes approximieren wir $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{H}_x$ (mit beliebig kleinem μ) durch ein von S um die räumliche M_{II}-Strecke $\sigma > 0$ abbleibendes Polygon h'_x. Dann konstruieren wir in der inneren σ-Umgebung von S eine parallele Sphäre S', die also zu h_x und $\mathfrak{K}$ fremd ist. Daher läßt sich zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ ein trennendes Polygon[18]) h'_y auf H zeichnen, welches zusammen mit h'_x den verlangten „schmalen“ Streifen begrenzt.

Von da ab lassen sich die Überlegungen des § 5 zunächst auf den Schnitt von S mit H sinngemäß übertragen. Und weil jeder Einzelumlauf auf S' zwischen A' und B' mit geringer, zu w fremder Deformation übergeführt werden kann in einen Einzelumlauf auf S zwischen A und B, ist hiermit Satz II bewiesen.

§ 7.

Beweis von Satz IVa.

Begrenzt eine Sphäre S_1 ein El.R.St., so läßt sich eine Metrik M_{II} bestimmen, in welcher S_1 als M_{II}-Sphäre erscheint. Enthält das El.R.St. im Innern eine abgeschlossene Punktmenge G, so hat diese einen M_{II}-Abstand $\varrho > 0$ von S_1 und man kann eine benachbarte M_{II}-Sphäre S_2 konstruieren, welche S_1 von G trennt. Wird S_1 von S_2 durch eine M_I-Sphäre K getrennt, so wird S_1 auch von G durch K getrennt, d. h. die Sätze IVa und IVb sind gleichbedeutend.

Beweis von Satz IVb.

Eine trennende M_{II}-Sphäre S läßt sich ohne weiteres zwischen S_1 und S_2 legen. S führen wir durch M_I-Approximation in eine zu S_1 und S_2 fremde M_I-Sphäre K über. Wenn irgendein M_I-Streckenzug g, der von S_1 nach S_2 führt, K in einer ungeraden Zahl von Punkten trifft, so wird S_1 von S_2 durch K getrennt, was wir beweisen wollen.

1. *Aufsuchung des Streckenzugs g.*

Es werden zwei M_I-Sphären H und H_a zu Hilfe genommen. H schneidet S_1 und S_2, also auch S. Man konstruiert wie in § 3, 1 einen Weg

[17]) D. h. das Polygon soll höchstens den Abstand $\frac{3}{2}\mu$, mindestens den Abstand $\frac{1}{2}\mu$ von $\mathfrak{K}$ haben; Konstr. s. v. Kerékjártó a. a. O.[3]), S. 49.

[18]) s. v. Kerékjártó a. a. O.[3]), S. 36.

$w = X A_2 A A_1 B_1 B B_2 X$; dabei soll X innerhalb S_2 auf H liegen und es sollen die benachbarten Punkte $A_2 A A_1$ (ebenso die benachbarten Punkte $B_2 B B_1$) nacheinander auf $S_2 S S_1$ liegen. Verläuft dann S_2 (somit auch S) nahe genug und passend[19]) bei S_1, so kann w leicht derart gewählt werden, daß S, S_1 und S_2 von w in keinen andern als den bezeichneten Punkten getroffen werden und daß um A die (kleine) zu H fremde M_I-Sphäre H_a gelegt werden kann, welche sämtliche zwischen S_1 und S_2 liegenden w_I-Punkte (w_I nahe bei w, s. § 3, 1) im Innern enthält, außer den in der Umgebung von B liegenden, die wir mit einer analogen, zu H_a fremden Sphäre H_b gegen H abgrenzen können. War die M_I-Aproximation von S fein genug, so enthält H_a auch alle Schnittpunkte von w_I mit der (zu S_1 und S_2 fremden) aus S entstandenen M_I-Sphäre K — außer den analog bei B liegenden. Das heißt aber, es läßt sich ein zu H fremder (*innerhalb H_a auf w_I gelegener*) M_I-Streckenzug g finden, der vom S_2-Innern ins S_1-Äußere führt und von welchem wir im folgenden die Anzahl der Schnittpunkte $(g \times K)$ bestimmen können.

2. *Abzählung der Punkte* $(g \times K)$:

Wir konstruieren eine M_I-Sphäre K', welche von w_I in zwei Punktgruppen durchsetzt wird:

a) längs g in denselben Punkten wie K, also $(g \times K') \equiv (g \times K)$,

b) längs $w_I - g$ in einer ungeraden Zahl von vorgeschriebenen Punkten.

Existiert K', so enthält offenbar auch Gruppe a) eine ungerade Anzahl von Punkten, wie wir beweisen wollen.

Die Punkte der Gruppe b) entnehmen wir den Punkten $(w_I \times H)$, indem wir wie in § 3, 2 ein El.Fl.St. ε auf H mit (nahe bei einem Übergangskontinuum $\mathfrak{K}$ liegenden) Randpolygon π suchen, welches eine ungerade Zahl von solchen Punkten zusammenfaßt. $\pi = k_h$ ist unter Überstreichung des stetigen, zu w_I fremden Bildes δ eines Ringstreifens überführbar in einen Einzelumlauf k_s auf S zwischen A und B, den wir gleich als Jordankurve außerhalb H_a wählen können. Dieser Umstand verbürgt wie folgt die Existenz von K'. k_s berandet auf S das El.Fl.St. η, welches von w nur den Punkt A enthält. $\Omega = \delta + \varepsilon + \eta$ ist das stetige Bild einer Sphäre, welches durch M_I-Approximation in die M_I-Sphäre K' überge-

[19]) Es ist zweckmäßig, hier nicht die in § 1 definierte „Parallelität“ von Sphären zu verwenden, sondern S_2 (und ebenso S zwischen S_1 und S_2) etwa folgendermaßen konstruiert zu denken — alles im Innern von S_1 und im Sinne der Metrik M_{II}: Es mögen in jedem Eckpunkt von S_1 nur drei S_1-Facetten angrenzen. Zu jeder der (ebenflächigen) Facetten wird in genügender Nähe eine parallele Ebene gezeichnet. Diese Ebenen schneiden gegenseitig aus sich solche Facetten heraus, daß die Randpolygone entsprechender Facetten gleich viele und entsprechend parallele Seiten haben.

führt wird. Dabei kann η innerhalb von H_a mit denselben M_I-Dreiecken approximiert werden, wie dies bei der Konstruktion von K geschah. Sorgen wir noch dafür, daß w_I keine der Umschaltungskanten des Komplexes Δ (s. § 1) trifft, so schneidet g die Sphäre K' in denselben Punkten wie K — trotz verschiedener Umschaltung längs der Kanten. Ferner bleibt bei genügend feiner Triangulierung auf ε [20]) die Lage und Anzahl der dortigen Schnittpunkte mit w_I unverändert, wenn wir von S zu K' übergehen. Es existiert also K' mit den geforderten Eigenschaften, w. z. b. w.

§ 8.

Beweis von Satz III.

Vorgelegt ist das auf H mehr als ein Gebiet bestimmende Randstück $\mathfrak{R}$ eines Gebietes $\mathfrak{H}$. Um zu zeigen, daß es ein Punktepaar A, B auf S gibt, für welches im Sinn des Satzes II $\mathfrak{R}$ zum Übergangskontinuum wird, müssen wir den zu einem gewissen Punktepaar A, B gehörenden Weg w_I wie in § 3, 1 konstruieren und zeigen, daß $\mathfrak{R}$ (bzw. das approximierende Polygon π_h) eine ungerade Zahl von Schnittpunkten $(w_I \times H)$ abgrenzt. Da (s. § 5 und Anm. 11) $\mathfrak{R}$ auch auf S mehr als ein Gebiet begrenzt, können wir auf S zwei Punkte A, B wählen, die sowohl auf S durch $\mathfrak{R}$, wie auch innerhalb S durch $\mathfrak{H}$ (Satz I) getrennt werden. Konstruiere w nach § 3, 1: w trifft S nur in A und B, $\mathfrak{H}$ nur in einem Punkt X, H nur in endlich vielen Punkten. Wir behaupten, daß A, B, w_I das Übergangskontinuum $\mathfrak{R}$ besitzen.

Wieder konstruieren wir das stetige Bild $\Omega = \delta + \varepsilon + \eta$ einer Sphäre, das wir aus zwei stetigen Bildern ε, η eines El.Fl.St. und aus einem, zu w_I fremden, stetigen Bild δ eines Ringstreifens zusammensetzen. Nach Satz IV wissen wir, daß die genügend feine M_I-Approximation eines El.Fl.St. η auf S, welches w nur in A trifft, von dem Weg g, d. h. w_I in einer ungeraden Zahl von Punkten durchsetzt wird. Daher muß — in Umkehrung der Methode des § 7 — die M_I-Approximation eines jeden ε (welches η und δ zu Ω ergänzt) von w_I in einer ungeraden Zahl von Punkten geschnitten werden.

Konstruiere auf S in hinreichender Nähe von $\mathfrak{R}$ ein M_{II}-Polygon k_s als Einzelumlauf zwischen A und B, was zufolge der Wahl von A und B möglich ist, und nehme k_s als Rand des El.Fl.St. η. Deformiere k_s in der $\mathfrak{R}$-Umgebung derart nach H, daß ein geschlossener M_I-Streckenzug k_h entsteht, so wird δ überstrichen.

---

[20]) ε für sich ist zwar schon ein M_I-El.Fl.St., wird aber in gewisser Entfernung von w_I Durchdringungen mit δ und η haben, deshalb erfordert die Triangulierung auf ε eine gewisse Feinheit.

Sollten die Punkte $(w_I \times H)$ durch k_h in mehr als zwei durch k_h getrennte Gruppen zerfallen, so beseitigen wir dieses Vorkommnis wie in § 6 durch Übergang zu einer „parallelen“ Sphäre S'.

Besitzt dann k_h in bezug auf zwei, den beiden verschiedenen Punktgruppen entnommene Punkte X und Y die Ordnung γ (der Fall $\gamma = 0$ erledigt sich wie in § 4, Anfang), so gibt es ein auf H in k_h eingespanntes El.Fl.St. ε (mit Windungspunkt), welches jeden Punkt $(w_I \times H)$ der einen Punktgruppe γ-mal überdeckt. Enthielte diese Punktgruppe $2n$ Punkte, so würde bei genügend feiner M_I-Approximation von Ω (vgl. sinngemäß Anm. 19) der Weg w_I daselbst in $2n\gamma$ Punkten geschnitten werden, was unmöglich ist. Es ist also eine ungerade Zahl von Punkten in dieser Punktgruppe vorhanden und daraus folgt nach § 3, 2, daß $\mathfrak{K}$ ein (zu w und w_I gehörendes) „Übergangskontinuum“ ist.

(Eingegangen am 12. August 1927.)

Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung.

V. Mitteilung.

Explizite Lösung des Bolometerproblems.

Von

Gustav Doetsch in Stuttgart.

Einleitung.

In der IV. Mitteilung[1]) wurde das sogenannte Bolometerproblem aufgeworfen: An das eine (unzugängliche) Ende $x = 0$ eines linearen Wärmeleiters ist eine Wärmequelle von der unbekannten Temperatur $A(t)$, wo t die Zeit bedeutet, angelegt; zwecks größerer Übersichtlichkeit sei vorläufig angenommen, daß das andere Ende $x = c$ des Leiters auf der konstanten Temperatur 0 liegt und daß die Temperatur $\Phi(x)$ des Leiters zu Beginn des Versuches ($t = 0$) überall gleich 0 ist. Es wird nun die Temperatur $\Phi(x, t)$ an einem „zugänglichen" Zwischenpunkte x_0 $(0 < x_0 < c)$ abgelesen, und daraus soll die an dem Ende $x = 0$ anliegende Temperatur $A(t)$ bestimmt werden. Dieses Problem läuft auf eine lineare Integralgleichung 1. Art hinaus:

$$\Phi(x_0, t) = A(t) * G(x_0, t),$$

wo die durch den Stern angedeutete „Faltung" das Integral

$$\int_0^t A(\tau)\, G(x_0, t - \tau)\, d\tau$$

[1]) I. Mitteilung von F. Bernstein und G. Doetsch, Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 285–292. II. Mitteilung von G. Doetsch, ebenda 22 (1925), S. 293–306. III. Mitteilung von G. Doetsch, ebenda 25 (1926), S. 608–626. IV. Mitteilung von F. Bernstein und G. Doetsch, ebenda 26 (1927), S. 89–98. Im folgenden als M I, M II, M III, M IV zitiert.

und $G(x,t)$ die Greensche Funktion (vgl. M I, S. 292)

$$-\frac{1}{2c^2}\left[\frac{\partial \vartheta_3\left(v,\frac{t}{c^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{x}{2c}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(x+2mc)\,e^{-\frac{(x+2mc)^2}{4t}}$$

bedeutet. In M IV wurde nun gezeigt, daß die gestellte Aufgabe sich erheblich vereinfachen läßt, indem es nämlich genügt, das entsprechende Problem für den einseitig *unendlich langen* Leiter $(0 \leqq x \leqq \infty)$ zu lösen. Für diesen reduziert sich die Greensche Funktion auf (vgl. M II, S. 303)

$$\psi(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

d. h. auf das dem Summationsindex $m=0$ entsprechende Glied. Ist die den Temperaturablauf $\Phi(x_0,t)$ bei unendlich langem Leiter erzeugende Randtemperatur $\mathsf{A}(t)$ gemäß der Integralgleichung

$$\Phi(x_0,t) = \mathsf{A}(t) * \psi(x_0,t)$$

bestimmt, so findet man $A(t)$ mit Hilfe der Formel (3a) oder (3b) von M IV. Es kommt also alles darauf an, die vereinfachte Integralgleichung zu lösen, was in expliziter Form in der gegenwärtigen Mitteilung geschehen soll. Das dabei angewandte Verfahren hat selbstverständlich auch allgemeinere Bedeutung, wird aber schon an diesem speziellen Fall hinreichend deutlich werden. — Um ein Beispiel von der Anwendbarkeit unserer Lösung zu nennen, sei auf das klassische Problem der Temperaturverteilung des Erdinnern hingewiesen, das an anderer Stelle behandelt werden soll.

In § 1 sind einige vorbereitende Erörterungen zusammengestellt, während die eigentliche Behandlung der Integralgleichung in § 2 enthalten ist.

§ 1.

Hilfsbetrachtungen.

1. Die Lösung der partiellen Differentialgleichung der Wärmeleitung besitzt eine Eigenschaft, die für das Bolometerproblem von wesentlicher Bedeutung ist. Wir behaupten nämlich:

Die von der Randtemperatur $\mathsf{A}(t)$ *in einem einseitig unendlich langen Wärmeleiter von der Anfangstemperatur* $\Phi(x) \equiv 0$ *erzeugte Temperaturverteilung*

$$\Phi(x,t) = \mathsf{A}(t) * \psi(x,t)$$

besitzt für jedes Wertepaar $x>0$, $t>0$ *sämtliche partiellen Ableitungen nach der Variablen* t, *und es gilt in jedem Punkte* $x>0$:

$$\Phi(x,t) \to 0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \to 0,\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \to 0,\ \ldots \text{ für } t \to 0.$$

Beweis. Daß $\Phi(x,t)$ selbst für $t \to 0$ an die Randwerte 0 anschließt, wurde in M II bewiesen und wird schon durch die Natur des Problems ($\Phi(x) \equiv 0$) gefordert. Um $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ zu bilden, benutzen wir einen Spezialfall des Hilfssatzes 2 in M II, S. 294, der besagt: Eine Funktion $F_1(t)$ sei für $t \geqq 0$ stetig differenzierbar, eine weitere Funktion $F_2(t)$ von $t > 0$ bis zum Nullpunkt (uneigentlich) absolut integrabel; ist $F_1(0) = 0$, so ist die Faltungsfunktion

$$\Phi(t) = F_1(t) * F_2(t)$$

für $t > 0$ differenzierbar, und zwar ist

$$\Phi'(t) = \int_0^t F_1'(\tau)\, F_2(t-\tau)\, d\tau.$$

Wenden wir diesen Satz an auf

$$F_1(t) = \psi(x,t), \qquad F_2(t) = \mathsf{A}(t),$$

so ergibt sich wegen

$$F_1(0) = \lim_{t \to 0} \psi(x,t) = 0 \quad \text{bei festem } x > 0,$$

daß sogar unter unserer in den früheren Mitteilungen üblichen weiten Voraussetzung, daß $\mathsf{A}(t)$ bloß uneigentlich absolut integrabel zu sein braucht, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ für $t > 0$ existiert und folgendermaßen gebildet werden kann:

$$\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial \psi(x,\tau)}{\partial \tau}\, \mathsf{A}(t-\tau)\, d\tau.$$

Da aber $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$ für $t \to 0$ gegen 0 strebt (vgl. M II), so nähert sich auch $\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}$ mit t dem Werte 0. — Analog verläuft der Beweis für die höheren Ableitungen

$$\frac{\partial^\nu \Phi(x,t)}{\partial t^\nu} = \int_0^t \frac{\partial^\nu \psi(x,\tau)}{\partial \tau^\nu}\, \mathsf{A}(t-\tau)\, d\tau,$$

da sämtliche Ableitungen von $\psi(x,t)$ mit t gegen 0 abnehmen.

Das Gleiche wie bei unendlich langem Leiter gilt übrigens auch für die Lösung bei *endlichem Leiter*

$$\Phi(x,t) = A(t) * G(x,t),$$

weil nach M II die Funktion $G(x,t)$ mit ihren sämtlichen partiellen Ableitungen nach t für $t \to 0$ sich dem Werte 0 nähert.

Aus der soeben bewiesenen Eigenschaft folgt, daß eine an die Anfangstemperatur $\Phi(x) \equiv 0$ anschließende Temperaturverteilung $\Phi(x, t)$ die *notwendigen Bedingungen* erfüllen muß, daß ihre sämtlichen partiellen Ableitungen nach t für $t > 0$ existieren und bei festem x mit t gegen 0 abnehmen. Eine solche Funktion $\Phi(x, t)$ ist also für *kein* x im Punkte $t = 0$ *analytisch* in der Variablen t, so daß eine Entwicklung nach Potenzen von t, wie sie in manchen klassischen Untersuchungen[2]) zugrunde gelegt wird, überhaupt ausgeschlossen ist.

2. Im folgenden werden wir uns mit Vorteil des Begriffes der *Ableitung von nicht ganzzahliger Ordnung* (der Riemann-Liouvilleschen[3]) Derivierten) bedienen. Da dieser Begriff sowie der eng damit zusammenhängende des iterierten Integrals von nicht ganzzahliger Vielfachheit sich unter Zuhilfenahme der *Laplace-Transformation*, die wir nachher benutzen werden, besonders übersichtlich und zwanglos ergibt, so sollen die Dinge hier kurz von diesem Standpunkt aus behandelt werden.

Wir betrachten eine in einem Intervall $0 \leqq t \leqq T$ definierte Funktion $F(t)$, die dort sämtliche Ableitungen besitzt, von denen wir der Einfachheit halber annehmen wollen, daß sie — wie es später bei uns der Fall sein wird — ebenso wie $F(t)$ selbst im Nullpunkt sämtlich verschwinden. Dazu nehmen wir die durch iterierte Integration von 0 bis zur variablen oberen Grenze entstehenden Funktionen

$$I^k F = \int_0^t d\tau_k \int_0^{\tau_k} d\tau_{k-1} \dots d\tau_2 \int_0^{\tau_2} F(\tau_1)\, d\tau_1 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

die man vermittels der Faltungssymbolik sehr einfach aufschreiben kann. Die Integration von 0 bis t ist nämlich gleichbedeutend mit der Faltung der Funktion mit der Konstanten 1:

$$\int_0^t F(\tau)\, d\tau = F * 1,$$

so daß das k-fach iterierte Integral sich so ausdrückt:

$$I^k F = F * \underset{1}{1} * \underset{2}{1} * \dots * \underset{k}{1}.$$

Die Ableitungen von F, F selbst und die iterierten Integrale

(A) $$\dots, \quad F*1*1, \quad F*1, \quad F, \quad F', \quad F'', \dots$$

[2]) So z. B. bei S. von Kowalevsky, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **80** (1875), S. 1–32, und in den hieran anschließenden Arbeiten.

[3]) J. Liouville, Sur le calcul des différentielles à indices quelconques, Journ. de l'éc. polytechn. 21. cah., **13** (1832), S. 71–162; B. Riemann, Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, Ges. math. Werke, 2. Aufl., S. 353–366.

bilden in der hingeschriebenen Anordnung eine Folge, die man von links nach rechts durch den Prozeß der Differentiation, von rechts nach links durch den der Faltung (Integration) durchläuft.

Ehe wir weiterschreiten, wollen wir bemerken, daß man der Schreibweise des k-fach iterierten Integrals in der Faltungssymbolik einen unmittelbar anschaulichen *Beweis* für die bekannte Tatsache entnehmen kann, daß dieses Integral sich durch ein *einfaches* ausdrücken läßt. Da nämlich die Faltung assoziativ ist[4]), so gilt

$$I^k F = F * (1 * 1 * \ldots * 1) = F * \overset{*k}{1}.$$

Nun ist aber, wie man leicht ausrechnet:

$$\overset{*k}{1} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)},$$

also

$$I^k F = F * \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^t F(\tau)\,(t-\tau)^{k-1}\,d\tau.$$

Definieren wir $F(t) \equiv 0$ für $t > T$, so gehört F mit seinen Ableitungen und iterierten Integralen zum „Oberbereich“[5]), d. h. zum Bereich derjenigen Funktionen, die Laplace-Transformierte besitzen, deren Gesamtheit den „Unterbereich“ ausmacht. Bezeichnet man die Laplace-Transformierte von F mit f:

$$L(F) \equiv \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = f(s),$$

so ist unter unseren Voraussetzungen über F nach bekannten Sätzen[6])

$$(1) \qquad L(F^{(\nu)}) = s^\nu f,$$

$$(2) \qquad L(X * Y) = L(X)\,L(Y),$$

$$(3) \qquad L(1) = \frac{1}{s},$$

also

$$L\left(\overset{*k}{1}\right) = \frac{1}{s^k}$$

und

$$L\left(F * \overset{*k}{1}\right) = f\frac{1}{s^k}.$$

---

[4]) G. Doetsch, Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus. Math. Annalen **89** (1923), S. 192—207 [S. 199].

[5]) Siehe die in Fußnote [4]) zitierte Arbeit, S. 197.

[6]) Siehe die in Fußnote [4]) zitierte Arbeit, S. 198.

Der Funktionenfolge (A) entspricht mithin im Unterbereich die nachstehende:

(B) $$\ldots, \frac{f}{s^2}, \frac{f}{s}, f, sf, s^2 f, \ldots .$$

Dies ist nun einfach die Folge der mit f multiplizierten Potenzen von s mit negativ und positiv ganzzahligen Exponenten. Da es sehr naheliegend ist, diese Folge für beliebige reelle Exponenten α zu interpolieren, so denken wir uns im Unterbereich sämtliche Potenzen

$$s^\alpha f$$

hingeschrieben und bekommen dann automatisch die entsprechende Interpolation im Oberbereich, wenn wir zu diesen Unterfunktionen die Oberfunktionen bilden. Für *negatives* $\alpha = -\beta$ $(\beta > 0)$ hat $s^\alpha = s^{-\beta}$ eine Oberfunktion, nämlich $\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$, so daß, wenn wir die Umkehrung der Laplace-Transformation mit L^{-1} bezeichnen, nach Formel (2)

$$L^{-1}(s^{-\beta} f) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} * F \quad \text{für} \quad \beta > 0$$

ist, womit wir für ganzzahliges $\beta = k$ auf die vorhin erwähnte Formel zurückfallen und im allgemeinen Falle nunmehr einen Ausdruck für das β-fache Integral bei beliebigem positiven β haben:

$$I^\beta F = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t F(\tau)\,(t-\tau)^{\beta-1}\,d\tau .$$

Ein nichtganzzahliges *positives* α dagegen schreiben wir als Differenz einer positiven ganzen Zahl n und einer positiven Zahl β

$$\alpha = n - \beta$$

(also z. B. $n = [\alpha] + 1$) und erhalten

$$s^\alpha f = s^n (s^{-\beta} f).$$

Zu $s^{-\beta} f$ gehört als Oberfunktion $I^\beta F$, eine Funktion, von der man nach dem schon S. 569 benutzten Hilfssatz feststellt, daß sie unter den über F gemachten Voraussetzungen beliebig oft differenzierbar ist:

$$\frac{d^\nu I^\beta F}{dt^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t F^{(\nu)}(\tau)\,(t-\tau)^{\beta-1}\,d\tau$$

und daß ihre Ableitungen für $t = 0$ verschwinden. Also ist nach Formel (1)

$$L^{-1}(s^\alpha f) = \frac{d^n I^\beta F}{dt^n} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t F^{(n)}(\tau)\,(t-\tau)^{\beta-1}\,d\tau .$$

Dieser Ausdruck ist seiner Herleitung nach von der speziellen Wahl von n (und damit von β) unabhängig und liefert eine sinngemäße, mit der Riemannschen übereinstimmende Definition der α-ten Ableitung oder Derivierten[7]):

$$D^{\alpha} F = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t F^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{\beta-1} d\tau .$$

Diese Formel schließt nun auch den vorher erledigten Fall $\alpha < 0$ ein: um für ihn den richtigen Ausdruck zu erhalten, braucht man nur $n = 0$ zu nehmen. Daher kann man das $-\alpha$-fache Integral auch durch D^{α} bezeichnen[8]).

§ 2.

Lösung der Integralgleichung des Bolometerproblems.

Wie in der Einleitung ausgeführt, besteht unsere Aufgabe darin, die Integralgleichung

$$\Phi(x_0, t) = \mathsf{A}(t) * \psi(x_0, t)$$

mit der unbekannten Funktion $\mathsf{A}(t)$ zu lösen. Nach § 1, 1 muß, damit überhaupt eine Lösung existiert, notwendigerweise folgende Bedingung erfüllt sein:

(Voraussetzung N.) *Die gegebene Funktion $\Phi(x_0, t)$ soll für $t \geqq 0$ sämtliche Ableitungen (nach t) besitzen, und diese sollen ebenso wie Φ selbst für $t = 0$ verschwinden.*

Da die Lösung in einem Intervall $0 \leqq t \leqq T$ nur von den Werten der Funktion Φ im gleichen Intervall abhängt, so können wir Φ eventuell

---

[7]) Wie man sich, indem man $n = [\alpha] + 1$ nimmt, leicht überzeugt, genügt es für die Gültigkeit des Ausdrucks für die α-te Derivierte, nur die Existenz der $[\alpha] + 1$ ersten Ableitungen und das Verschwinden der $[\alpha]$ ersten im Nullpunkt vorauszusetzen.

[8]) Die hier gemachte Voraussetzung, daß die Ableitungen von F im Nullpunkt verschwinden, genügt für den gegenwärtigen Zweck und wurde im Interesse der Kürze der Entwickelungen gemacht, ist jedoch für die Anwendbarkeit der Laplace-Transformation nicht wesentlich, wie ich an anderer Stelle zeigen werde. — A. M. Molinari nimmt in ihrer Arbeit „Derivazione ad indice qualunque", Rendiconti acc. Lincei, Nota I: (5) **25** (1916), 2. sem. S. 230—233; Nota II: ib. S. 268—273; Nota III: (5) **26** (1917), 2. sem. S. 57—60, die Funktion F als von $-\infty$ bis $+\infty$ gegeben an und definiert die Derivierten durch Integrale zwischen den Grenzen $-\infty$ und t. Auch dieser Kalkül ist der oben dargelegten Methode zugänglich, wenn man das Laplace-Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt (eine vor allem von Mellin behandelte Form). Die Beziehung $D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} = D^{\alpha_1 + \alpha_2}$, deren Nachweis die zweite Note von Frl. Molinari gewidmet ist, wird bei Übersetzung in den Unterbereich eine Selbstverständlichkeit; ebenso durchsichtig werden die Anwendungen, die in der dritten Note gemacht werden (zu der Anwendung auf die Abelsche Integralgleichung vgl. übrigens die Behandlung in der S. 571, Fußnote [4]) zitierten Arbeit des Verfassers, S. 203).

für $t > T$ so abändern, daß es eine Laplace-Transformierte $\varphi(x_0, s)$ besitzt. Es entspricht dann unserer Integralgleichung wegen $L[\psi(x_0, t)] = e^{-x_0\sqrt{s}}$ im Unterbereich die lineare algebraische Gleichung

$$\varphi(x_0, s) = \alpha(s)\, e^{-x_0\sqrt{s}},$$

wenn wir die Unterfunktion von A mit α bezeichnen. Ihre Lösung lautet:

$$\alpha(s) = e^{x_0\sqrt{s}}\, \varphi(x_0, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n\, s^{\frac{n}{2}}}{n!}\, \varphi(x_0, s).$$

Das einzelne Reihenglied besitzt eine Oberfunktion und zwar nach § 1, 2 wegen Voraussetzung (N)

$$\frac{x_0^n}{n!} D^{\frac{n}{2}} \Phi(x_0, t).$$

Wenn also die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} D^{\frac{n}{2}} \Phi(x_0, t)$$

für jedes $t \geqq 0$ konvergiert und auf sie die Laplace-Transformation gliedweise ausgeübt werden darf, so ist sie die Lösung unserer Integralgleichung.

Wir werden nun aber verifizieren, daß sich diese Bedingung durch eine noch mildere und überdies leichter zu handhabende, die nicht mehr auf die Laplace-Transformation Bezug nimmt, ersetzen läßt:

(Voraussetzung *H.*) *Die Reihe*

$$\mathsf{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} D^{\frac{n}{2}} \Phi(x_0, t)$$

soll für $t \geqq 0$ *konvergent und in jedem endlichen Intervall* $0 \leqq t \leqq T$ *gliedweise integrierbar sein, auch nach Multiplikation mit einer positiven, eigentlich integrablen (und daher beschränkten) Funktion.*

Der nachfolgende Beweis läßt uns zugleich deutlich in den inneren Mechanismus unserer Integralgleichung und damit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung hineinschauen. — Statt direkt die Richtigkeit der Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \mathsf{A}(t) * \psi(x_0, t) = \Phi(x_0, t)$$

für obiges $\mathsf{A}(t)$ nachzuweisen, wollen wir zeigen, daß für $x > x_0$

$$\text{(b)} \qquad \mathsf{A}(t) * \psi(x, t) = \Phi(x_0, t) * \psi(x - x_0, t)$$

ist, so daß also gilt:

$$\lim \mathsf{A}(t) * \psi(x, t) = \Phi(x_0, t),$$

wenn x von rechts gegen x_0 strebt. (Denn $\Phi(x_0, t) * \psi(x - x_0, t)$ ist ja nichts anderes als die Temperatur eines von x_0 aus nach rechts sich erstreckenden Wärmeleiters, an den die Randtemperatur $\Phi(x_0, t)$ angelegt ist, so daß die Temperatur für $x_0 \leftarrow x$ an $\Phi(x_0, t)$ anschließen muß. Physikalisch gesprochen bedeutet die Gleichung (b), daß in den Punkten $x > x_0$ durch die Randtemperatur $\mathsf{A}(t)$, angelegt an den Punkt $x = 0$, dieselbe Temperatur erzeugt wird, wie durch die Randtemperatur $\Phi(x_0, t)$, angelegt an den Punkt x_0, so daß also $\Phi(x_0, t)$ die durch $\mathsf{A}(t)$ in x_0 erzeugte Temperatur sein muß.) Durch den Nachweis von (b) an Stelle von (a) umgehen wir eine Schwierigkeit, auf die an der betr. Stelle hingewiesen werden wird. Da $\mathsf{A}(t) * \psi(x, t)$ für $x = x_0$ stetig ist, so ist es jedenfalls gestattet, den Wert für $x = x_0$ durch Grenzübergang zu bestimmen.

Nach Voraussetzung (H) ist

$$\mathsf{A}(t) * \psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} D^{\frac{n}{2}} \Phi(x_0, t) * \psi(x, t).$$

Nun gilt aber:

$$D^{\frac{n}{2}} \Phi(x_0, t) * \psi(x, t) = \Phi(x_0, t) * D^{\frac{n}{2}} \psi(x, t),$$

was man direkt im Oberbereich, noch leichter aber im Unterbereich verifizieren kann:

$$L\left(D^{\frac{n}{2}} \Phi * \psi\right) = L\left(D^{\frac{n}{2}} \Phi\right) \cdot L(\psi) = \left[s^{\frac{n}{2}} L(\Phi)\right] \cdot L(\psi)$$

$$= L(\Phi) \cdot \left[s^{\frac{n}{2}} L(\psi)\right] = L(\Phi) \cdot L\left(D^{\frac{n}{2}} \psi\right) = L\left(\Phi * D^{\frac{n}{2}} \varphi\right)$$

(man beachte, daß $\Phi(x_0, t)$ und $\psi(x, t)$ beide die Bedingung (N) erfüllen). Mithin ist

$$\mathsf{A}(t) * \psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \Phi(x_0, t) * D^{\frac{n}{2}} \psi(x, t).$$

Nun erfüllt aber $\psi(x, t)$ die Gleichung:

$$D^{\frac{n}{2}} \psi = (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n},$$

die sich für geradzahlige n aus der Tatsache ergibt, daß $\psi(x, t)$ der Wärmeleitungsgleichung genügt und allgemein wieder leicht im Unterbereich bewiesen werden kann:

$$L\left(D^{\frac{n}{2}} \psi\right) = s^{\frac{n}{2}} L(\psi) = s^{\frac{n}{2}} e^{-x\sqrt{s}} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x\sqrt{s}} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} L(\psi).$$

Also ist

$$\mathsf{A}(t) * \psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x_0^n}{n!} \Phi(x_0,t) * \frac{\partial^n \psi(x,t)}{\partial x^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x_0)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [\Phi(x_0,t) * \psi(x,t)],$$

wobei die Vertauschung von Differentiation und Integration sehr leicht zu rechtfertigen ist. Rechts steht nun aber einfach die Taylorentwicklung der Funktion $U(z) = \Phi(x_0,t) * \psi(z,t)$ mit dem Entwicklungsmittelpunkt x und dem Inkrement $-x_0$. Diese stellt die Funktion innerhalb des größten Kreises in der komplexen z-Ebene um den Punkt x dar, der noch dem Regularitätsgebiet von $U(z)$ angehört. Nun ist aber die Funktion $\Phi(x_0, t-\tau)\psi(z,\tau) = \frac{z\,\Phi(x_0,t-\tau)}{2\sqrt{\pi}\,\tau^{3/2}} e^{-\frac{z^2}{4\tau}}$ für jedes τ des reellen Intervalls $0 \leqq \tau \leqq t$ regulär in dem durch $|\arc z| < \frac{\pi}{4}$ definierten Gebiet $\mathfrak{G}$ und stetig in (z,τ), wenn z in dem Gebiet $\mathfrak{G}$ und τ in dem Intervall $0 \leqq \tau \leqq t$ variiert (in $\mathfrak{G}$ ist $\Re z^2 > 0$). Folglich ist nach einem Satz von De la Vallée-Poussin[9]) $U(z)$ eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion, und die Taylorentwicklung um den Punkt $x\,(>0)$ stellt die Funktion dar in dem Kreis um x mit dem Radius $\frac{x}{\sqrt{2}}$. Für alle $x > \sqrt{2}\,x_0$ ist daher

$$\mathsf{A}(t) * \psi(x,t) = \Phi(x_0,t) * \psi(x - x_0, t).$$

Nun sind aber beide Seiten analytisch in x für $|\arc(x - x_0)| < \frac{\pi}{4}$, und da sie auf der Strecke $x > \sqrt{2}\,x_0$ übereinstimmen, so sind sie im ganzen Regularitätsgebiet identisch; die Gleichung gilt daher für alle $x > x_0$, wie wir behauptet haben[10]).

Wir können also folgendes **Theorem** formulieren:

Wenn die an der Stelle x_0 abgelesene Temperaturfunktion $\Phi(x_0,t)$ die Bedingungen (N) und (H) erfüllt, so wird das Bolometerproblem gelöst durch die Randtemperatur

$$\mathsf{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} D^{\frac{n}{2}} \Phi(x_0,t),$$

---

[9]) Brux. Ann. soc. scient. **17** (1893), S. 323.

[10]) Man sieht aus dem Beweis, warum wir nicht direkt $\mathsf{A}(t) * \psi(x_0,t)$ ausrechnen konnten. Würde man in diesem Fall die Reihe als Ausdruck für die entsprechende Funktion ansehen, so käme man zu dem absurden Resultat:

$$\mathsf{A}(t) * \psi(x_0,t) = \Phi(x_0,t) * \psi(0,t) = \Phi(x_0,t) * 0 = 0.$$

ausführlich geschrieben:

$$\mathsf{A}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{!x_0^{2m}}{(2m)!} \Phi^{(m)}(x_0, t) + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_0^{2m+1}}{(2m+1)!} \Phi^{(m+1)}(x_0, t) * \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_0^{2m}}{(2m)!} \Phi^{(m)}(x_0, t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_0^{2m+1}}{(2m+1)!} \int_0^t \Phi^{(m+1)}(x_0, \tau)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau .$$

Es sei der Hinweis auf die bemerkenswerte Tatsache gestattet, daß der lange nur als eine formale Bildung angesehene *Differentialquotient gebrochener Ordnung* sich hier bei einem *physikalischen Problem* als etwas durchaus Naturgemäßes einstellt.

Für die *Anwendungen* wird es nützlich sein, einige praktisch leichter zu verifizierende Bedingungen anzugeben, unter denen die Voraussetzung (H) erfüllt ist:

Bedingung I. Die Reihe für $\mathsf{A}(t)$ ist in jedem endlichen Intervall $0 \leqq t \leqq T$ gleichmäßig konvergent.

Dann ist $\mathsf{A}(t)$ notwendig eine stetige Funktion, da die Reihenglieder stetig sind. — Die Bedingung I ist z. B. erfüllt, wenn

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_0^{2m}}{(2m)!} \left| \Phi^{(m+1)}(x_0, t) \right|$$

gleichmäßig konvergiert. (Dazu genügt es, daß für alle t und m

$$\left| \Phi^{(m+1)}(x_0, t) \right| < K t^{\gamma m}$$

mit zwei positiven Konstanten K und γ ist.) Dann konvergieren nämlich auch die Reihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_0^{2m}}{(2m)!} \Phi^{(m)}(x_0, t)$$

und

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_0^{2m+1}}{(2m+1)!} \Phi^{(m+1)}(x_0, t) * \frac{1}{\sqrt{t}}$$

gleichmäßig.

Bedingung II. Die Reihe für $\mathsf{A}(t)$ konvergiert in jedem endlichen Intervall gegen eine integrable Funktion und ihre Partialsummen sind dort gleichmäßig beschränkt.

Dann gilt dasselbe für die mit einer positiven, integrierbaren (beschränkten) Funktion multiplizierte Reihe, und diese ist daher nach einem Satz von Arzelà[11]) gliedweise integrabel. — $\mathsf{A}(t)$ kann in diesem Falle unstetig sein, was ja gerade in den Anwendungen häufig vorkommt.

[11]) Rendiconti acc. Lincei (4) **1** (1885), S. 537; Memorie ist. Bologna (5) **8** (1899), S. 723.

Wir wollen nun noch kurz zusammenstellen, wie die Lösung im *allgemeinen Fall* aussieht. Hat zunächst der Wärmeleiter die *endliche Länge* c, so erhält man die zugehörige Randtemperatur $A(t)$ aus dem oben berechneten $\mathsf{A}(t)$ gemäß Formel (3b) in M IV (S. 93) in folgender Weise:

$$A(t) = \mathsf{A}(t) * \left\{\breve{1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi(2((n-1)(c-x_0)+c), t) - \psi(2n(c-x_0), t)\right]\right\}.$$

Dabei ist noch die Annahme gemacht, daß das Ende $x = c$ auf der konstanten Temperatur $B(t) \equiv 0$ gehalten wird und daß der Leiter zu Beginn des Versuches die überall gleiche Temperatur $\Phi(x) \equiv 0$ hatte. Sind $B(t)$ und $\Phi(x)$ *nicht identisch* 0, so wird der Temperaturablauf im Punkte $x = x_0$ gegeben durch (siehe M III S. 612):

$$\Phi(x_0, t) = A(t) * G(x_0, t) + B(t) * G(c - x_0, t) + \int_0^c \Gamma(x_0, \xi; t)\, \Phi(\xi)\, d\xi,$$

wo

$$\Gamma(x, \xi; t) = \frac{2}{c} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 \pi^2 \frac{t}{c^2}} \sin m\pi \frac{x}{c} \sin m\pi \frac{\xi}{c}$$

ist. Die Integralgleichung des Bolometerproblems lautet daher in diesem allgemeinsten Falle

$$A(t) * G(x_0, t) = \Phi(x_0, t) - B(t) * G(c - x_0, t) - \int_0^c \Gamma(x_0, \xi; t)\, \Phi(\xi)\, d\xi,$$

so daß wir in unserer Lösung S. 576 bzw. oben an die Stelle der gegebenen Funktion, die früher $\Phi(x_0, t)$ hieß, nunmehr den Ausdruck

$$\Phi(x_0, t) - B(t) * G(c - x_0, t) - \int_0^c \Gamma(x_0, \xi; t)\, \Phi(\xi)\, d\xi$$

zu setzen haben.

Stuttgart, 16. April 1927.

(Eingegangen am 8. Mai 1927.)

Eine Klasse von Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z, x_1, \ldots, x_n$.

Von

Karl Faber in Idar a. d. Nahe.

In der „Theorie der Transformationsgruppen“ Abschnitt II Kap. 26 leitet Lie allgemeine Sätze her über die Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z, x_1, \ldots, x_n$. Insbesondere betrachtet er die Gruppen, deren charakteristische Funktionen als Gruppen von Punkttransformationen des $(2n+1)$-fach ausgedehnten Raumes $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, z$ transitiv sind, also Gruppen, die die charakteristischen Funktionen:

$$1 + \ldots, \; x_i + \ldots, \; p_i + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

enthalten, wenn $x_i = p_i = z = 0$ ein Wertsystem von allgemeiner Lage ist[1]). Die Glieder zweiter Stufe der charakteristischen Funktionen zweiter Stufe, die in der Gruppe auftreten, bilden dann stets eine Untergruppe der Berührungstransformationsgruppe:

$$x_i x_k, \quad x_i p_k, \quad p_i p_k, \quad z - \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \; [1])$$

Auf Veranlassung von Herrn Prof. Engel untersuche ich nun diejenigen Gruppen, deren charakteristische Funktionen zweiter Stufe die folgenden Glieder zweiter Stufe enthalten:

$$x_i p_k, \qquad x_i p_i - x_k p_k \qquad (i, k = 1, \ldots, n; \; i \neq k)$$

oder

$$x_i p_k \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

so daß diese Glieder zweiter Stufe entweder die spezielle lineare homogene oder die allgemeine lineare homogene Gruppe in n Veränderlichen darstellen.

[1]) A. a. O. S. 540.

§ 1.

Bestimmung der charakteristischen Funktionen dritter und höherer Stufe.

Eine Gruppe von Berührungstransformationen in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ enthalte in der Umgebung des Wertsystems $x_i = p_i = z = 0$ von allgemeiner Lage die folgenden charakteristischen Funktionen nullter, erster und zweiter Stufe:

$$1 + \ldots, \quad x_i + \ldots, \quad p_i + \ldots, \quad x_i p_k + \ldots, \quad x_i p_i - x_k p_k + \ldots$$
$$(i, k = 1, \ldots, n; \; i \neq k).$$

Wir lassen es dahingestellt, ob $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu$ auftritt; außer den angegebenen sollen keine weiteren charakteristischen Funktionen nullter, erster und zweiter Stufe vorkommen. Kann die Gruppe unter diesen Voraussetzungen charakteristische Funktionen dritter Stufe enthalten?

Wir nehmen zunächst an, es sei eine charakteristische Funktion dritter Stufe vorhanden, die von z frei ist, also die Form hat:

$$k = g_3(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) + \ldots,$$

wo g_3 eine ganze homogene Funktion dritten Grades der x, p bedeutet, und die weggelassenen Glieder in den z, x, p von vierter und höherer Stufe sind. Dann läßt sich zeigen, daß unserer Gruppe eine charakteristische Funktion dritter Stufe angehört, die ein Glied dritten Grades von der Form:

$$x_1^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} \qquad (\alpha_1, \beta_1 \geqq 0, \; \alpha_1 + \beta_1 = 3)$$

mit nicht verschwindenden Koeffizienten enthält.

Ist in

$$g_3 = \sum A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n, \beta_1 \ldots \beta_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} p_1^{\beta_1} \ldots p_n^{\beta_n} \qquad (\sum_\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu) = 3)$$

ein $\alpha_1 = 3$, so ist unsere Behauptung evident. Wir können demnach $0 \leqq \alpha_1 \leqq 2$ annehmen. Die Kombination:

$$\{x_1 p_2 + \ldots, k\} = \{x_1 p_2, g_3\} + \ldots$$

ergibt eine charakteristische Funktion:

$$k_1 = \sum A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n, \beta_1 \ldots \beta_n} (\alpha_2 x_1^{\alpha_1 + 1} x_2^{\alpha_2 - 1} x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n} p_1^{\beta_1} \ldots p_n^{\beta_n} -$$
$$- \beta_1 x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} p_1^{\beta_1 - 1} p_2^{\beta_2 + 1} p_3^{\beta_3} \ldots p_n^{\beta_n}) + \ldots,$$

die der Gruppe angehört.

Wir fassen jetzt ein Glied von g_3 ins Auge, für das α_1 den größten in g_3 vorkommenden Wert hat. Solche Glieder kann es natürlich mehrere geben. Unter den Gliedern dritter Stufe von k_1 ist dann eins vorhanden, bei dem der Exponent von x_1 um 1 größer und der von x_2 um 1 kleiner

ist als bei dem ins Auge gefaßten. Kombinieren wir jetzt k_1 mit $x_1 p_2 + \ldots$ und so fort α_2-mal, so erhalten wir eine charakteristische Funktion dritter Stufe mit dem Gliede:

$$x_1^{\alpha_1} x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n} p_1^{\beta_1} \ldots p_n^{\beta_n} \qquad (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \ldots + \beta_n = 3).$$

Ebenso kann man durch α_3-malige Kombination mit $x_1 p_3 + \ldots$ x_3 beseitigen usw. So erhält man schließlich eine Funktion mit dem Gliede:

$$x_1^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} \ldots p_n^{\beta_n} \qquad (\alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \beta_n = 3).$$

Analog kann man durch eine geeignete Anzahl von Kombinationen mit $x_2 p_1 + \ldots$, $x_3 p_1 + \ldots$, $\ldots$, $x_n p_1 + \ldots$ alle $p_2, \ldots, p_n$ entfernen und so schließen, daß eine charakteristische Funktion dritter Stufe mit dem Gliede

$$x_1^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} \qquad (\alpha_1 + \beta_1 = 3)$$

auftritt.

Wegen

$$\begin{cases} \{p_1, x_1^3\} = 3 x_1^2, & \{p_1, x_1 p_1^2\} = p_1^2, \\ \{x_1, x_1^2 p_1\} = - x_1^2, & \{x_1, p_1^3\} = - 3 p_1^2 \end{cases}$$

führt aber das Vorhandensein einer solchen charakteristischen Funktion dritter Stufe auf einen Widerspruch mit unserer Voraussetzung. Es können demnach keine in den Gliedern dritter Stufe von z freien charakteristischen Funktionen auftreten.

Es könnten also höchstens Funktionen vorkommen von der Form:

$$k = z \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu x_\nu + b_\nu p_\nu) + \varphi_3(x, p) + \ldots,$$

wobei nicht alle a_ν und b_ν verschwinden dürften, φ_3 homogen vom dritten Grade in x, p wäre und die weggelassenen Glieder von vierter und höherer Stufe in z, x, p wären. Wegen

$$\{p_\mu + \ldots, k\} = a_\mu z + (p_\mu, \varphi_3) + \ldots$$
$$\{x_\mu + \ldots, k\} = - b_\mu z - x_\mu \sum_\nu (a_\nu x_\nu + b_\nu p_\nu) + (x_\mu \varphi_3) + \ldots$$

kommen wir auch hier auf einen Widerspruch mit unserer Voraussetzung. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Enthält eine Gruppe von Berührungstransformationen in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ in der Umgebung des Wertsystems $x_i = p_i = z = 0$ von allgemeiner Lage die charakteristischen Funktionen:

$$1 + \ldots, \quad x_i + \ldots, \quad p_i + \ldots, \quad x_i p_k + \ldots, \quad x_i p_i - x_k p_k + \ldots$$
$$(i, k = 1, \ldots, n; \; i \neq k)$$

oder

$$1 + \ldots, \quad x_i + \ldots, \quad p_i + \ldots, \quad x_i p_k + \ldots \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

aber außer diesen keine anderen von nullter, erster und zweiter Stufe, so können in der Gruppe keine charakteristischen Funktionen von dritter und höherer[2]*) Stufe auftreten.*

§ 2.

Normierung der Gruppe mit den charakteristischen Funktionen $1+\ldots,\quad x_i+\ldots,\quad p_i+\ldots,\quad x_i p_k+\cdots$ $(i, k=1, \ldots, n)$.

Es sei in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ eine Gruppe von Berührungstransformationen durch die folgenden charakteristischen Funktionen gegeben:

$$(1)\qquad N=1+\ldots,\quad X_i=x_i+\ldots,\quad P_i=p_i+\ldots,\quad T_{ik}=x_i p_k+\ldots \qquad (i, k=1, \ldots, n).$$

Damit die Funktionen eine Gruppe bestimmen, müssen folgende Beziehungen gelten:

$$(2)\qquad \begin{cases} \{NX_i\}=[N, X, P, T], \quad \{NP_i\}=[N, X, P, T], \\ \{NT_{ik}\}=[X, P, T], \quad \{X_i X_k\}=[X, P, T], \quad \{P_i P_k\}=[X, P, T], \\ \{X_i P_k\}=-\varepsilon_{ik} N+[X, P, T], \quad \{X_\mu T_{ik}\}=-\varepsilon_{\mu k} X_i+[T], \\ \{P_\mu T_{ik}\}=\varepsilon_{i\mu} P_k+[T], \quad \{T_{ik} T_{\mu\nu}\}=\varepsilon_{k\mu} T_{i\nu}-\varepsilon_{\nu i} T_{\mu k}, \end{cases}$$

wobei die eckige Klammer eine bestimmte lineare Kombination der in ihr stehenden Funktionen bedeutet.

Die Aufgabe besteht jetzt darin, die Funktionen (1) so zu normieren, daß die Relationen (2) möglichst einfach werden.

Zur Abkürzung benutzen wir das Symbol[3])

$$U=\sum_{\nu=1}^{n} T_{\nu\nu}.$$

U hat die Eigenschaft, mit allen T_{ik} vertauschbar zu sein:

$$\{U T_{ik}\}=0.$$

Außerdem ist

$$\{X_i U\}=-X_i-\sum_{\varrho,\tau}\alpha_{i\varrho\tau} T_{\varrho\tau},$$

oder wenn wir $X_i+\sum_{\varrho,\tau}\alpha_{i\varrho\tau} T_{\varrho\tau}$ als neues X_i einführen:

$$\{X_i U\}=-X_i.$$

Weiter bestehen die Relationen:

$$\{X_i T_{kj}\}=\varepsilon_{ij} X_k+\sum_{\varrho,\tau} a_{ikj\varrho\tau} T_{\varrho\tau}.$$

---

[2]) Siehe a. a. O. S. 541.

[3]) Vgl. „Theorie der Transformationsgruppen“ **1**, S. 626.

Die Jacobische Identität:

$$\{\{X_i T_{kj}\} U\} + \{\{T_{kj} U\} X_i\} + \{\{U X_i\} T_{kj}\} \equiv 0$$

oder

$$\{\{X_i T_{kj}\} U\} + \{X_i T_{kj}\} \equiv 0$$

ergibt:

$$\sum_{\varrho,\tau} a_{ikj\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \equiv 0\,,$$

d. h.

$$\{X_i T_{kj}\} = -\varepsilon_{ij} X_k\,. \tag{3}$$

Aus

$$\{P_i U\} = P_i + \sum_{\varrho,\tau} \beta_{i\varrho\tau} T_{\varrho\tau}$$

folgt, wenn man die rechte Seite als neues P_i einführt:

$$\{P_i U\} = P_i\,.$$

Wenden wir daher auf die Relation:

$$\{P_i T_{kj}\} = \varepsilon_{ik} P_j + \sum_{\varrho,\tau} b_{ikj\varrho\tau} T_{\varrho\tau}$$

die Jacobische Identität:

$$\{\{P_i T_{kj}\} U\} - \{P_i T_{kj}\} \equiv 0$$

an, so erhalten wir

$$\{P_i T_{kj}\} = \varepsilon_{ik} P_j\,. \tag{4}$$

Die Identität $\{\{X_i X_k\} U\} + 2\{X_i X_k\} \equiv 0$ ergibt, auf

$$\{X_i X_k\} = \sum_{\nu} a_{ik\nu} X_\nu + \sum_{\nu} b_{ik\nu} P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} c_{ik\varrho\tau} T_\varrho$$

angewandt,

$$\sum_{\nu} a_{ik\nu} X_\nu + 3 \sum_{\nu} b_{ik\nu} P_\nu + 2 \sum_{\varrho,\tau} c_{ik\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \equiv 0\,,$$

so daß wir haben:

$$\{X_i X_k\} = 0\,. \tag{5}$$

Ganz analog ergibt sich

$$\{P_i P_k\} = 0\,. \tag{6}$$

Damit sind alle Relationen, in denen N nicht vorkommt, erledigt. Es handelt sich also jetzt noch um die Normierung von N.

Aus

$$\{NU\} = \sum_{\nu} \alpha_\nu X_\nu + \sum_{\nu} \beta_\nu P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} \gamma_{\varrho\tau} T_{\varrho\tau}$$

folgt, wenn wir

$$N' = N + \sum_{\nu} \alpha_\nu X_\nu - \sum_{\nu} \beta_\nu P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} \lambda'_{\varrho\tau} T_{\varrho\tau}$$

setzen,

$$\{N' U\} = \sum_{\varrho,\tau} \gamma_{\varrho\tau} T_{\varrho\tau}\,,$$

wie auch die $\lambda'_{\varrho\tau}$ gewählt sind.

Wenden wir jetzt auf

$$\{X_i P_k\} = -\varepsilon_{ik} N' + \sum_\nu a_{ik\nu} X_\nu + \sum_\nu b_{ik\nu} P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} c_{ik\varrho\tau} T_\varrho$$

die Identität $\{\{X_i P_k\} U\} \equiv 0$ an, so ergibt sich

$$-\varepsilon_{ik} \sum_{\varrho,\tau} \gamma_{\varrho\tau} T_{\varrho\tau} - \sum_\nu a_{ik\nu} X_\nu + \sum_\nu b_{ik\nu} P_\nu \equiv 0,$$

also

$$\{N'U\} = 0 \quad \text{und} \quad \{X_i P_k\} = -\varepsilon_{ik} N' + \sum_{\varrho,\tau} c_{ik\varrho\tau} T_{\varrho\tau}.$$

Schließlich liefert die Identität:

$$\{\{N' X_i\} U\} + \{\{X_i U\} N'\} \equiv 0,$$

angewandt auf

$$\{N' X_i\} = d_i N' + \sum_\nu e_{i\nu} X_\nu + \sum_\nu f_{i\nu} P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} g_{i\varrho\tau} T_{\varrho\tau}:$$

$$d_i N' + 2 \sum_\nu f_{i\nu} P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} g_{i\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \equiv 0,$$

d. h.

$$\{N' X_i\} = \sum_\nu e_{i\nu} X_\nu.$$

Diese Relation und die für $\{N'U\}$ und $\{X_i P_k\}$ haben Gültigkeit, wie auch in N' die $\lambda'_{\varrho\tau}$ gewählt werden. Natürlich hängen die Konstanten $c_{ik\varrho\tau}$ und $e_{i\nu}$ von der Wahl der $\lambda'_{\varrho\tau}$ ab. Setzen wir nun etwa alle $\lambda'_{\varrho\tau} = 0$, so erhalten wir ganz bestimmte Konstanten $e_{i\nu}$. Jetzt führen wir ein neues N ein, nämlich

$$N'' = N' + \sum_{\varrho\tau} \lambda_{\varrho\tau} T_{\varrho\tau}$$

und erhalten so

$$\{N'' X_i\} = \sum_\nu (e_{i\nu} + \lambda_{\nu i}) X_\nu.$$

Indem wir also $\lambda_{\nu i} = -e_{i\nu}$ setzen und außerdem für N'' wieder N schreiben, bekommen wir

$$\{N X_i\} = 0 \tag{7}$$

und

$$\{NU\} = 0, \quad \{X_i P_k\} = -\varepsilon_{ik} N + \sum_{\varrho,\tau} c_{ik\varrho\tau} T_{\varrho\tau}.$$

Ferner bestehen die Relationen

$$\{NP_i\} = a_i N + \sum_\nu b_{i\nu} X_\nu + \sum_\nu c_{i\nu} P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} d_{i\varrho\tau} T_{\varrho\tau},$$

$$\{NT_{ik}\} = \sum_\nu \alpha_{ik\nu} X_\nu + \sum_\nu \beta_{ik\nu} P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} \gamma_{ik\varrho\tau} T_{\varrho\tau}.$$

Die Identitäten:

$$\{\{NP_i\} U\} + \{P_i N\} \equiv 0 \quad \text{und} \quad \{\{NT_{ik}\} U\} \equiv 0$$

ergeben

$$\{NP_i\} = \sum_\nu c_{i\nu} P_\nu \quad \text{und} \quad \{NT_{ik}\} = \sum_{\varrho,\tau} \gamma_{ik\varrho\tau} T_{\varrho\tau}.$$

Wenden wir $\{\{NT_{ik}\}X_\mu\}+\{\{T_{ik}X_\mu\}N\}\equiv 0$ auf die letzte Beziehung an, so erhalten wir $\sum_\varrho \gamma_{ik\varrho\mu}X_\varrho\equiv 0$, also

$$\{NT_{ik}\}=0. \tag{8}$$

Endlich liefert $\{\{NP_i\}X_\mu\}+\{\{P_iX_\mu\}N\}\equiv 0$ die Identität:

$$c_{i\mu}N-\sum_{\nu,\varrho,\tau}c_{i\nu}\cdot c_{\mu\nu\varrho\tau}T_{\varrho\tau}\equiv 0,$$

die durch $c_{i\mu}=0$ erfüllt wird. Es ist also auch

$$\{NP_i\}=0. \tag{9}$$

Damit sind alle Klammerrelationen mit Ausnahme von

$$\{X_iP_k\}=-\varepsilon_{ik}N+\sum_{\varrho,\tau}c_{ik\varrho\tau}T_{\varrho\tau}$$

erledigt.

Wir zeigen jetzt, daß sich alle Konstanten $c_{ik\varrho\tau}$ auf eine einzige reduzieren. Da dies für $n=1$ schon der Fall ist, können wir $n\geqq 2$ annehmen.

Zunächst ergeben die Identitäten:

$$\{\{X_iP_k\}X_\mu\}+\{\{P_kX_\mu\}X_i\}\equiv 0 \quad\text{und}\quad \{\{X_iP_k\}P_\mu\}+\{\{P_\mu X_i\}P_k\}\equiv 0$$

$$c_{ik\varrho\mu}=c_{\mu k\varrho i} \quad\text{und}\quad c_{i\mu k\tau}=c_{ik\mu\tau}. \tag{10}$$

Bilden wir

$$\{\{X_iP_k\}\sum_\nu\alpha_\nu T_{\nu\nu}\}+\{\{P_k,\sum_\nu\alpha_\nu T_{\nu\nu}\}X_i\}+\{\{\sum_\nu\alpha_\nu T_{\nu\nu},X_i\}P_k\}\equiv 0,$$

unter den α_ν vollkommen willkürliche Konstanten verstanden, so erhalten wir

$$\sum_{\varrho,\tau}c_{ik\varrho\tau}(\alpha_\tau-\alpha_\varrho+\alpha_i-\alpha_k)T_{\varrho\tau}\equiv 0.$$

Daraus folgt nichts für die Konstanten $c_{ii\varrho\varrho}$, c_{ikik} und c_{iiii}, wohl aber, daß alle anderen $c_{ik\varrho\tau}=0$ sind.

Als letzte Identität bilden wir

$$\{\{X_iP_k\}T_{\mu\nu}\}+\{\{P_kT_{\mu\nu}\}X_i\}+\{\{T_{\mu\nu}X_i\}P_k\}\equiv 0;$$

diese ergibt zwischen den Konstanten $c_{ik\varrho\tau}$ die Relationen:

$$\varepsilon_{\nu\tau}\cdot c_{ik\varrho\mu}-\varepsilon_{\mu\varrho}\cdot c_{ik\nu\tau}+\varepsilon_{i\nu}\cdot c_{\mu k\varrho\tau}-\varepsilon_{k\mu}\cdot c_{i\nu\varrho\tau}=0. \tag{11}$$

Die Relationen (10) und (11) gestatten jetzt, die Konstanten

$$c_{ii\varrho\varrho},\qquad c_{ikik},\qquad c_{iiii}$$

durch eine unter ihnen auszudrücken.

Zunächst nehmen wir $n\geqq 3$ an. Setzen wir in (11)

$i=k$, $\varrho=\mu$, $\nu=\tau$, $i\neq\varrho$, $i\neq\nu$ bzw. $i=\nu$, $k=\mu$, $\varrho=\tau$, $i\neq\varrho$, $k\neq\varrho$

so erhalten wir

$$c_{ii\varrho\varrho} = c_{ii\nu\nu} \quad (i \neq \varrho,\ i \neq \nu) \quad \text{bzw.} \quad c_{ii\varrho\varrho} = c_{kk\varrho\varrho} \quad (i \neq \varrho,\ k \neq \varrho).$$

Aus beiden Relationen folgt weiter

$$c_{ii\nu\nu} = c_{kk\varrho\varrho} \qquad (i \neq \nu,\ k \neq \varrho,\ i \neq \varrho). \tag{11'}$$

Es läßt sich aber leicht einsehen, daß (11′) auch für $i = \varrho$ gültig bleibt. Zunächst ergibt (10) die Beziehungen:

$$c_{ii\varrho\varrho} = c_{\varrho i\varrho i} \quad \text{und} \quad c_{ii\varrho\varrho} = c_{i\varrho i\varrho},$$

woraus folgt: $c_{\varrho i\varrho i} = c_{i\varrho i\varrho}$, also auch

$$c_{ii\varrho\varrho} = c_{\varrho\varrho ii}. \tag{10'}$$

Da nun weiter $c_{ii\varrho\varrho} = c_{kk\varrho\varrho}$ $(i \neq \varrho,\ k \neq \varrho)$ ist, so ist in der Tat (11′) für $i = \varrho$ gültig. (10) und (11′) ergeben dann zusammen:

$$c_{ii\nu\nu} = c_{\nu i\nu i} = c_{kk\varrho\varrho} = c_{k\varrho k\varrho} \qquad (i \neq \nu,\ k \neq \varrho). \tag{11''}$$

Für $n = 2$ ergibt sich (11″) unmittelbar aus (10).

Um über die Konstanten c_{iiii} Aufschluß zu erhalten, setzen wir endlich in (11) noch $i = k = \varrho = \mu$, $\nu = \tau$, $i \neq \nu$ und erhalten so

$$c_{iiii} - c_{ii\nu\nu} - c_{i\nu i\nu} = 0 \qquad (i \neq \nu).$$

In Verbindung mit (11″) besagt die Gleichung

$$c_{iiii} = 2\,c_{kk\varrho\varrho} = 2\,c_{\mu\nu\mu\nu} = 2\,c \qquad (k \neq \varrho,\ \mu \neq \nu). \tag{12}$$

Damit sind alle nicht verschwindenden Konstanten $c_{ik\varrho\tau}$ auf die einzige Konstante c zurückgeführt, und es ist endlich

$$\{X_i P_k\} = -\varepsilon_{ik} N + c\,(T_{ik} + \varepsilon_{ik} \sum_{\nu} T_{\nu\nu}). \tag{13}$$

Unsere Gruppe läßt sich also so normieren, daß ihre Zusammensetzung durch (3) bis (9) und (13) bestimmt ist.

Durch eine reguläre Berührungstransformation in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ können wir unsere Gruppe in eine solche überführen, daß der Funktion N die Funktion 1 entspricht. Aus den Relationen (7), (9) und (8) folgt dann, daß auch alle anderen Funktionen von z frei werden. Wir haben es also nur noch mit einer Gruppe in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ zu tun.

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

I. Es sei $c = 0$.

Dann hat unsere Gruppe genau dieselbe Zusammensetzung wie die verkürzte Gruppe

$$1, \quad x_i, \quad p_i, \quad x_i p_k \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Wir zeigen, daß sie mit dieser auch ähnlich ist.

In beiden Gruppen sind die charakteristischen Funktionen erster Stufe voneinander unabhängig. Es bleibt also bloß übrig, nachzuweisen, daß sich die Funktionen zweiter Stufe beidemal in derselben Weise durch die Funktionen erster Stufe ausdrücken lassen. Zur Bestimmung dieser Abhängigkeit ergeben sich aber aus den Relationen (3) und (4) die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial T_{kj}}{\partial P_i} = \varepsilon_{ij} X_k; \qquad \frac{\partial T_{kj}}{\partial X_i} = \varepsilon_{ik} P_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit den Anfangsbedingungen $(T_{kj})_{X_1=\ldots=X_n=P_1=\ldots=P_n=0} = 0$.

Weil dadurch die T_{kj} als Funktionen von X, P vollkommen bestimmt sind und die Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen für beide Gruppen dieselben sind, ist unsere Behauptung bewiesen.

II. Es sei $c \neq 0$.

Dann setzen wir:

$$N' = \frac{1}{c(n+1)}, \quad X_i' = X_i, \quad P_i' = -\frac{P_i}{c}, \quad T_{ik}' = T_{ik} - \frac{\varepsilon_{ik}}{c(n+1)};$$

die X_i', P_i', T_{ik}' haben dann genau dieselbe Zusammensetzung wie die allgemeine projektive Gruppe des R_n. Führen wir jetzt noch die Berührungstransformation $x_i' = (n+1)cx_i$, $p_i' = p_i$ aus, so erhalten wir die Gruppe:

$$(15)\quad N = 1, \; X_i = x_i + \ldots, \; P_i = -(n+1)p_i + \ldots, \; T_{ik} = -\varepsilon_{ik} + x_i p_k + \ldots$$

mit der Zusammensetzung

$$(16)\quad \begin{cases} (X_i X_k) = 0, \; (P_i P_k) = 0, \; (P_i X_k) = T_{ki} + \varepsilon_{ik} \sum_\nu T_{\nu\nu}, \\ (X_i T_{k\nu}) = -\varepsilon_{i\nu} X_k, \; (P_i T_{k\nu}) = \varepsilon_{ik} P_\nu, \; (T_{ik} T_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} T_{i\nu} - \varepsilon_{i\nu} T_{\mu k}. \end{cases}$$

Sie ist gleichzusammengesetzt mit der folgenden Gruppe:

$$(15')\quad N' = 1, \; X_i' = x_i' - \frac{1}{n+1} x_i' \sum_\nu x_\nu' p_\nu', \; P_i' = -(n+1)p_i', \; T_{ik}' = -\varepsilon_{ik} + x_i' p_k'.$$

Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe X_i', P_i', T_{ik}' entstehen aus den Transformationen der allgemeinen projektiven Gruppe durch Erweiterung, nämlich durch Hinzunahme des Volumenelementes[4]).

Wie im vorigen Falle läßt sich auch hier zeigen, daß die Gruppe (15) mit (15′) ähnlich ist. In beiden Gruppen sind zunächst die charakteristischen Funktionen erster Stufe voneinander unabhängig. Weiter erhalten wir zur Bestimmung der T_{ik} als Funktionen der X_τ, P_τ aus (16) die Differentialgleichungen:

[4]) Vgl. die Dissertation von A. Süß, Die Gruppen, die mit der allgemeinen projektiven Gruppe der Ebene gleiche Zusammensetzung haben. S. 7, 2. Fall. Greifswald 1905.

$$\sum_\tau (T_{\tau i} + \varepsilon_{i\tau} \sum_\varrho T_{\varrho\varrho}) \frac{\partial T_{k\nu}}{\partial X_\tau} = \varepsilon_{ik} P_\nu; \quad \sum_\tau (T_{i\tau} + \varepsilon_{i\tau} \sum_\varrho T_{\varrho\varrho}) \frac{\partial T_{k\nu}}{\partial P_\tau} = \varepsilon_{i\nu} X_k$$
$$(i,\ k,\ \nu = 1, \ldots, n)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$(T_{k\nu})_{X_1 = \ldots = X_n = P_1 = \ldots = P_n = 0} = -\varepsilon_{k\nu}.$$

Dadurch sind aber die $T_{k\nu}$ vollkommen als Funktionen von X_τ, P_τ bestimmt. Da andererseits für die $T'_{k\nu}$ als Funktionen von X'_τ, P'_τ genau dieselben Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen gelten, ist unsere Behauptung bewiesen. Wir gelangen also zu folgendem Ergebnis:

Jede Gruppe von Berührungstransformationen in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, *die in der Umgebung des Wertsystems* $x_i = p_i = z = 0$ *von allgemeiner Lage die charakteristischen Funktionen:*

$$1 + \ldots, \quad x_i + \ldots, \quad p_i + \ldots, \quad x_i p_k + \ldots \quad (i, k = 1, \ldots, n),$$

aber sonst keine von nullter, erster und zweiter Stufe enthält, ist durch Berührungstransformation entweder ähnlich mit der Gruppe:

$$1, \quad x_i, \quad p_i, \quad x_i p_k \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

oder mit der Gruppe:

$$1, \quad x_i\Big(1 - \frac{1}{n+1} \sum_\nu x_\nu p_\nu\Big), \quad -(n+1) p_i, \quad -\varepsilon_{ik} + x_i p_k$$
$$(i, k = 1, \ldots, n).$$

§ 3.

Normierung der Gruppe mit den charakteristischen Funktionen $1 + \ldots,\ x_i + \ldots,\ p_i + \ldots,\ x_i p_k + \ldots,\ x_i p_i - x_k p_k$ $(i + k;\ i, k = 1, \ldots, n;\ n \geqq 2)$.

Die Funktionen $x_i p_i - x_k p_k$ ersetzen wir durch die Funktion $\sum_\nu \alpha_\nu x_\nu p_\nu$, oder wenn wir die Bezeichnungen von § 2 beibehalten, durch $\sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}$, wobei die α_ν willkürliche Konstanten sind, die jedoch der Bedingung $\sum_\nu \alpha_\nu = 0$ genügen müssen. Dann bestehen die Relationen

$$\{T_{ik}, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} = (\alpha_k - \alpha_i) T_{ik}; \quad \{T_{ii} - T_{kk}, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} = 0 \quad (\sum_\nu \alpha_\nu = 0).$$

Zunächst normieren wir auch hier die X_i. Aus:

$$\{X_i, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} = -\alpha_i X_i - \sum_{\varrho,\tau} \lambda_{i\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \qquad (\sum_\nu \alpha_\nu = 0,\ \sum_\varrho \lambda_{i\varrho\varrho} = 0)$$

folgt, wenn wir $X_i + \sum_{\varrho,\tau} l_{i\varrho\tau} T_{\varrho\tau}$ $(\sum_\varrho l_{i\varrho\varrho} = 0)$ als neues X_i wählen:

$$\{X_i, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} = -\alpha_i X_i + \sum_{\varrho,\tau} [-\lambda_{i\varrho\tau} + l_{i\varrho\tau}(\alpha_i + \alpha_\tau - \alpha_\varrho)] T_{\varrho\tau}.$$

Jetzt denken wir uns die α_ν bestimmt gewählt, jedoch so, daß $\sum_\nu \alpha_\nu = 0$ ist und alle $\alpha_i + \alpha_\tau - \alpha_\varrho \neq 0$ sind. Dann lassen sich die $l_{i\varrho\tau}$ aus den Gleichungen

$$l_{i\varrho\tau}(\alpha_i + \alpha_\tau - \alpha_\varrho) = \lambda_{i\varrho\tau}$$

bestimmen, und zwar ist die Bedingung $\sum_\varrho l_{i\varrho\varrho} = 0$ von selbst erfüllt. Es bestehen also, falls die α die vorhin bestimmten Werte haben, die Relationen:

$$\{X_i, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} = -\alpha_i X_i \qquad (\sum_\nu \alpha_\nu = 0).$$

Um zu zeigen, daß für beliebige β_ν gilt:

$$\{X_i, \sum_\nu \beta_\nu T_{\nu\nu}\} = -\beta_i X_i \qquad (\sum_\nu \beta_\nu = 0),$$

setzen wir

$$\{X_i, \sum_\nu \beta_\nu T_{\nu\nu}\} = -\beta_i X_i + \sum_{\varrho,\tau} g_{i\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \qquad (\sum_\varrho g_{i\varrho\varrho} = 0)$$

in die Jacobische Identität:

$$\{\{X_i, \sum_\nu \beta_\nu T_{\nu\nu}\} \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} + \alpha_i \{X_i, \sum_\nu \beta_\nu T_{\nu\nu}\} \equiv 0$$

ein und erhalten:

$$\sum_{\varrho,\tau} g_{i\varrho\tau}(\alpha_\tau - \alpha_\varrho + \alpha_i) T_{\varrho\tau} \equiv 0,$$

d. h. alle $g_{i\varrho\tau} = 0$, w. z. b. w.

Bilden wir weiter die Identität:

$$\{\{X_i T_{kj}\} \sum_\nu \beta_\nu T_{\nu\nu}\} + \{\{T_{kj}, \sum_\nu \beta_\nu T_{\nu\nu}\} X_i\} + \{\{\sum_\nu \beta_\nu T_{\nu\nu}, X_i\} T_{kj}\} \equiv 0$$

unter Berücksichtigung von

$$\{X_i T_{kj}\} = -\varepsilon_{ij} X_k + \sum_{\varrho,\tau} \gamma_{ikj\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \qquad (\sum_\varrho \gamma_{ikj\varrho\varrho} = 0),$$

so ergibt sich

$$\sum_{\varrho,\tau} \gamma_{ikj\varrho\tau}(\beta_\tau - \beta_\varrho + \beta_i - \beta_j + \beta_k) T_{\varrho\tau} \equiv 0,$$

also alle $\gamma_{ikj\varrho\tau} = 0$. Die normierten X stehen demnach mit den T in den Beziehungen:

(17) $\{X_i T_{kj}\} = -\varepsilon_{ij} X_k \quad (k \neq j), \qquad \{X_i, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} = -\alpha_i X_i \quad (\sum_\nu \alpha_\nu = 0).$

Analog erhält man durch Normieren der P_i

(18) $\{P_i T_{kj}\} = \varepsilon_{ik} P_j \quad (k \neq j), \qquad \{P_i, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} = \alpha_i P_i \quad (\sum_\nu \alpha_\nu = 0).$

Endlich ergibt die Identität:

$$\{\{X_i X_k\} \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} + \{\{X_k, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} X_i\} + \{\{\sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}, X_i\} X_k\} \equiv 0 \quad (\sum_\nu \alpha_\nu = 0),$$

angewandt auf

$$\{X_i X_k\} = \sum_\nu a_{ik\nu} X_\nu + \sum_\nu b_{ik\nu} P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} c_{ik\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \quad (\sum_\varrho c_{ik\varrho\varrho} = 0),$$

$$\sum_\nu a_{ik\nu}(\alpha_i+\alpha_k-\alpha_\nu) X_\nu + \sum_\nu b_{ik\nu}(\alpha_i+\alpha_k+\alpha_\nu) P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} c_{ik\varrho\tau}(\alpha_i+\alpha_k+\alpha_\tau-\alpha_\varrho) T_{\varrho\tau} \equiv 0,$$

woraus für $n \geqq 4$ folgt:

$$\{X_i X_k\} = 0.$$

Für $n = 2$ hat man: $(X_1 X_2) = c(T_{11} - T_{22})$; aus der Identität: $\{\{X_1 X_2\} T_{12}\} + \ldots \equiv 0$ folgt aber sofort $c = 0$. Ist $n = 3$, so ist

$$\{X_i X_k\} = b_{ikj} P_j \qquad (i \neq k \neq j).$$

Wir bilden die beiden Identitäten:

$$\{\{X_i X_k\} T_{ji}\} + \ldots \equiv 0, \qquad \{\{X_i X_k\} T_{jk}\} + \ldots \equiv 0$$

und erhalten:

$$b_{ikj} + b_{jki} = 0 \quad \text{und} \quad b_{ikj} + b_{ijk} = 0.$$

Wegen $\{X_i X_k\} = -\{X_k X_i\}$ ist $b_{ikj} = -b_{kij}$. Daher können wir die beiden letzten Gleichungen auch schreiben:

$$b_{kji} = b_{jik} = b_{ikj}.$$

Endlich bilden wir die Identität $\{\{X_i X_k\} X_j\} + \ldots \equiv 0$ und erhalten

$$b_{ikj} + b_{kji} + b_{jik} = 0,$$

woraus in Verbindung mit den vorletzten Gleichungen folgt $b_{ikj} = 0$. Es ist demnach für $n \geqq 2$

$$\{X_i X_k\} = 0. \tag{19}$$

Ganz analog erhält man

$$\{P_i P_k\} = 0. \tag{20}$$

Jetzt handelt es sich noch um die Normierung von N, die wir in drei Schritten erledigen.

Führen wir in

$$\{N, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} = \sum_\sigma a_\sigma X_\sigma + \sum_\sigma b_\sigma P_\sigma + \sum_{\varrho,\tau} c_{\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \quad (\sum_\varrho c_{\varrho\varrho} = 0),$$

$$N + \sum_\sigma l_\sigma X_\sigma + \sum_\sigma m_\sigma P_\sigma$$

als neues N ein, so ergibt sich

$$\{N, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} = \sum_\sigma (a_\sigma - l_\varrho \alpha_\sigma) X_\sigma + \sum_\sigma (b_\sigma + m_\sigma \alpha_\sigma) P_\sigma + \sum_{\varrho,\tau} c_{\varrho\tau} T_{\varrho\tau}.$$

Denken wir uns jetzt die α bestimmt gewählt, jedoch so, daß kein α verschwindet und $\sum_\nu \alpha_\nu = 0$ ist, so lassen sich die l und m aus den Gleichungen

$$a_\sigma - l_\sigma \alpha_\sigma = 0, \qquad b_\sigma + m_\sigma \alpha_\sigma = 0$$

berechnen, und es ist

$$\{N, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} = \sum_{\varrho,\tau} c_{\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \qquad (\sum_\varrho c_{\varrho\varrho} = 0).$$

Um zu zeigen, daß diese Beziehung für beliebige α gültig ist, setzen wir

$$\{N, \sum_\nu \beta_\nu T_{\nu\nu}\} = \sum_\sigma a'_\sigma X_\sigma + \sum_\sigma b'_\sigma P_\sigma + \sum_{\varrho,\tau} c'_{\varrho\tau} T_{\varrho\tau}$$

in die Identität

$$\{\{N, \sum_\nu \beta_\nu T_{\nu\nu}\} \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} + \{\{\sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}, N\} \sum_\nu \beta_\nu T_{\nu\nu}\} \equiv 0$$

ein und erhalten

$$-\sum_\sigma \alpha_\sigma a'_\sigma X_\sigma + \sum_\sigma \alpha_\sigma b'_\sigma P_\sigma + \sum_{\varrho,\tau} [(\alpha_\tau - \alpha_\varrho) c'_{\varrho\tau} - (\beta_\tau - \beta_\varrho) c_{\varrho\tau}] T_{\varrho\tau} \equiv 0.$$

Obige Beziehung ist also in der Tat für beliebige α gültig; natürlich hängen die $c_{\varrho\tau}$ von den α_ν ab.

Ferner besteht die Relation:

$$\{X_i P_k\} = -\varepsilon_{ik} N + \sum_\nu a_{ik\nu} X_\nu + \sum_\nu b_{ik\nu} P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} c_{ik\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \quad (\sum_\varrho c_{ik\varrho\varrho} = 0).$$

Die Identität:

$$\{\{X_i P_k\} \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} + \{\{P_k, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} X_i\} + \{\{\sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}, X_i\} P_k\} \equiv 0$$

ergibt

$$\sum_\nu a_{ik\nu}(\alpha_i - \alpha_k - \alpha_\nu) X_\nu + \sum_\nu b_{ik\nu}(\alpha_i - \alpha_k + \alpha_\nu) P_\nu +$$
$$+ \sum_{\varrho,\tau} [c_{ik\varrho\tau}(\alpha_i - \alpha_k + \alpha_\tau - \alpha_\varrho) - \varepsilon_{ik} c_{\varrho\tau}] T_{\varrho\tau} \equiv 0,$$

woraus folgt $a_{ik\nu} = b_{ik\nu} = 0$ und für $i = k$, $\varrho = \tau$: $c_{\varrho\varrho} = 0$. Also haben wir

$$\{N, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} \equiv \sum_{\varrho,\tau} c_{\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \qquad (\varrho \neq \tau, \sum_\nu \alpha_\nu = 0),$$

$$\{X_i P_k\} = -\varepsilon_{ik} N + \sum_{\varrho,\tau} c_{ik\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \qquad (\sum_\varrho c_{ik\varrho\varrho} = 0). \tag{21}$$

Wir denken uns jetzt wieder die α_ν bestimmt gewählt, jedoch so, daß alle α_ν voneinander verschieden sind und $\sum_\nu \alpha_\nu = 0$ ist. Führen wir dann $N + \sum_{\varrho,\tau} \frac{c_{\varrho\tau}}{\alpha_\varrho - \alpha_\tau} T_{\varrho\tau}$ $(\varrho \neq \tau)$ als neues N ein, so ergibt sich

$$\{N, \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} = 0 \qquad (\sum_\nu \alpha_\nu = 0). \tag{21a}$$

Die Identität $\{\{\sum_\nu \beta_\nu T_{\nu\nu}, N\} \sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} \equiv 0$ zeigt, daß (21a) auch für beliebige α_ν gültig ist.

Ehe wir N noch weiter normieren, vereinfachen wir die Klammerrelationen zwischen N und den übrigen Funktionen.

Wendet man auf

$$\{NT_{ik}\} = \sum_{\nu} \alpha_{ik\nu} X_\nu + \sum_{\nu} \beta_{ik\nu} P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} \gamma_{ik\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \quad (i \neq k,\ \sum_{\varrho} \gamma_{ik\varrho\varrho} = 0)$$

die Identität

$$\{\{NT_{ik}\} \sum_{\nu} \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} + \{\{T_{ik}, \sum_{\nu} \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} N\} \equiv 0$$

an, so erhält man

$$\{NT_{ik}\} = \gamma_{ik} T_{ik} \qquad (i \neq k), \tag{21b}$$

wenn man $\gamma_{ikik} = \gamma_{ik}$ setzt.

Substituiert man

$$\{NX_i\} = a_i N + \sum_{\nu} b_{i\nu} X_\nu + \sum_{\nu} c_{i\nu} P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} d_{i\varrho\tau} T_{\varrho\tau} \quad (\sum_{\varrho} d_{i\varrho\varrho} = 0)$$

in die Identität:

$$\{\{NX_i\} \sum_{\nu} \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} + \{\{X_i, \sum_{\nu} \alpha_\nu T_{\nu\nu}\} N\} \equiv 0,$$

so ergibt sich

$$\alpha_i a_i N + \sum_{\nu} b_{i\nu}(\alpha_i - \alpha_\nu) X_\nu + \sum_{\nu} c_{i\nu}(\alpha_i + \alpha_\nu) P_\nu + \sum_{\varrho,\tau} d_{i\varrho\tau}(\alpha_i + \alpha_\tau - \alpha_\varrho) T_{\varrho\tau} \equiv 0,$$

woraus folgt:

$$\{NX_i\} = b_i X_i \qquad (n \neq 2).$$

Analog erhält man

$$\{NP_i\} = c_i P_i \qquad (n \neq 2).$$

Für $n = 2$ hat man zunächst

$$\{NX_i\} = b_i X_i + c'_{ik} P_k; \quad \{NP_i\} = b'_{ik} X_k + c_i P_i \quad (i = 1, 2,\ k \neq i).$$

Jedoch zeigen die Jacobischen Identitäten

$$\{\{NX_1\} T_{21}\} + \ldots \equiv 0, \quad \{\{NX_1\} X_2\} + \ldots \equiv 0$$

bzw.

$$\{\{NP_1\} T_{12}\} + \ldots \equiv 0, \quad \{\{NP_1\} P_2\} + \ldots \equiv 0,$$

daß auch hier $b'_{ik} = c'_{ik} = 0$ ist.

Schließlich folgt aus

$$\{\{NX_i\} P_k\} + \{\{X_i P_k\} N\} + \{\{P_k N\} X_i\} \equiv 0$$

noch $c_i = -b_i$, so daß wir allgemein haben

$$\{NX_i\} = b_i X_i; \quad \{NP_i\} = -b_i P_i. \tag{21c}$$

Es sei

$$\sum_{\nu} b_\nu = c \quad \text{oder} \quad \sum_{\nu} (b_\nu - \varepsilon_{1\nu} c) = 0.$$

Dann führen wir $N - \sum_{\nu} (b_\nu - \varepsilon_{1\nu} c) T_{\nu\nu}$ als neues N ein und erhalten

$$\{NX_i\} = \varepsilon_{1i} c X_i, \quad \{NP_i\} = -\varepsilon_{1i} c P_i. \tag{22}$$

Weiterhin bleibt die Relation (21a) gültig; auf (21b) wenden wir die Identität $\{\{NT_{ik}\}X_u\}+\ldots\equiv 0$ an. Dann bekommen wir:

$$(23)\quad \{NT_{ik}\}=c(\varepsilon_{1i}-\varepsilon_{1k})T_{ik}\quad (i\neq k);\quad \{N,\sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\}=0\quad (\sum_\nu \alpha_\nu=0).$$

Jetzt sind nur noch die Konstanten $c_{ik\varrho\tau}$ in der Beziehung (21) durch c auszudrücken. Dabei verfahren wir genau so wie in § 2, S. 585f. Die Identitäten, die dort die Relationen (10) lieferten, ergeben jetzt

$$(24)\quad \begin{cases} c_{ik\varrho\mu}-c_{\mu k\varrho i}=(\varepsilon_{ik}\cdot\varepsilon_{1\mu}\cdot\varepsilon_{\mu\varrho}-\varepsilon_{k\mu}\cdot\varepsilon_{1i}\cdot\varepsilon_{i\varrho})c \\ c_{i\mu k\tau}-c_{ik\mu\tau}=(\varepsilon_{i\mu}\cdot\varepsilon_{1k}\cdot\varepsilon_{k\tau}-\varepsilon_{ik}\cdot\varepsilon_{1\mu}\cdot\varepsilon_{\mu\tau})c. \end{cases}$$

Man sieht leicht ein, daß sich diese Beziehungen durch die folgenden ersetzen lassen:

$$(24a)\quad c_{ii11}-c_{1i1i}=c\quad (i\neq 1),\qquad \text{sonst stets}\quad c_{ik\varrho\mu}=c_{\mu k\varrho i},$$

$$(24b)\quad c_{ii11}-c_{i1i1}=c\quad (i\neq 1),\qquad \text{„}\quad \text{„}\quad c_{i\mu k\tau}=c_{ik\mu\tau},$$

woraus noch folgt:

$$(24c)\qquad c_{i1i1}=c_{1i1i}.$$

Der Beziehung (11) S. 585 entspricht jetzt

$$(25)\quad \varepsilon_{\nu\tau}c_{ik\varrho\mu}-\varepsilon_{\mu\varrho}c_{ik\nu\tau}+\varepsilon_{i\nu}c_{\mu k\varrho\tau}-\varepsilon_{k\mu}c_{i\nu\varrho\tau}=\varepsilon_{ik}\cdot\varepsilon_{\mu\varrho}\cdot\varepsilon_{\nu\tau}(\varepsilon_{1\mu}-\varepsilon_{1\nu})c\quad (\mu\neq\nu).$$

Wie auf S. 585 folgt aus der Identität $\{\{X_iP_k\}\sum_\nu \alpha_\nu T_{\nu\nu}\}+\ldots\equiv 0$ nichts über die Konstanten $c_{ii\varrho\varrho}$, $c_{iki k}$, c_{iiii}; sie sagt aber aus, daß alle anderen $c_{ik\varrho\tau}$ verschwinden.

Weiterhin wählen wir in (25) $\nu=\tau$, $i=k$, $\varrho=\mu$, $i\neq\varrho,\nu$, $\varrho\neq\nu$; das gibt

$$(25a)\qquad c_{ii\varrho\varrho}-c_{ii\nu\nu}=(\varepsilon_{1\varrho}-\varepsilon_{1\nu})c\qquad (i\neq\varrho,\nu).$$

Endlich nehmen wir $i=k=\varrho=\mu$, $\nu=\tau$, $i\neq\nu$ an und erhalten aus (25)

$$(25b)\qquad c_{iiii}-c_{ii\nu\nu}-c_{i\nu i\nu}=(\varepsilon_{1i}-\varepsilon_{1\nu})c\qquad (i\neq\nu),$$

so daß sich unter Benutzung von (24b) aus den beiden letzten Gleichungen ergibt:

$$c_{ii\varrho\varrho}=c_{ii11}-c\quad (i\neq\varrho,1;\ \varrho\neq 1),\qquad c_{iiii}=2(c_{ii11}-c)\quad (i\neq 1).$$

Die Bedingung $\sum_\varrho c_{ii\varrho\varrho}=0$ liefert endlich: $(n+1)c_{ii11}-nc=0$, also

$$(25c)\quad \begin{cases} c_{ii11}=\dfrac{n}{n+1}c\quad (i\neq 1); \qquad c_{iiii}=-\dfrac{2c}{n+1}\quad (i\neq 1); \\ c_{ii\varrho\varrho}=-\dfrac{c}{n+1}\quad (1\neq i,\varrho;\ i\neq\varrho). \end{cases}$$

Setzt man in (25b) $i=1$ und benutzt dann (24a) und (25c), so ergibt sich

$$c_{11\nu\nu} = c_{1111} - \frac{n}{n+1}c \qquad (\nu \neq 1)$$

und unter Berücksichtigung von $\sum_{\nu} c_{11\nu\nu} = 0$

$$(25\mathrm{d}) \qquad c_{1111} = \frac{n-1}{n+1}c; \quad c_{11\nu\nu} = -\frac{c}{n+1} \qquad (\nu \neq 1).$$

Endlich folgt für $i=\varrho=\nu=\tau$, $\mu=k$, $i \neq k$ aus (25) noch

$$c_{ikik} = c_{iiii} - c_{kkii},$$

also

$$(25\mathrm{e}) \qquad c_{ikik} = -\frac{c}{n+1} \quad \text{für alle} \quad i \neq k.$$

Durch (25c, d, e) sind alle nicht verschwindenden Konstanten $c_{ik\varrho\tau}$ bestimmt; (21) läßt sich somit schreiben:

$$(26) \qquad \{P_k X_i\} = \frac{c}{n+1} T_{ik} + \varepsilon_{ik}\left[N + \frac{c}{n+1}\sum_{\nu}(1-(n+1)\varepsilon_{1\nu})\,T_{\nu\nu}\right].$$

Damit ist die Normierung zum Abschluß gebracht. Die Zusammensetzungen sind durch (17), ..., (20), (22), (23), (26) gegeben.

Wir haben jetzt wieder zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Es sei: $c=0$.

Dann führen wir durch eine reguläre Berührungstransformation in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ unsere Gruppe in eine solche über, daß der Funktion $N=1+\ldots$ die Funktion 1 entspricht.

Aus den Relationen (22) und (23) folgt dann, daß auch alle andern charakteristischen Funktionen von z frei werden. Wir haben es demnach nur noch mit einer Gruppe in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ zu tun, die dieselbe Zusammensetzung besitzt wie die verkürzte Gruppe:

$$(27) \qquad 1,\ x_i,\ p_i,\ x_i p_k,\ x_i p_i - x_k p_k \quad (i \neq k;\ i,k=1,\ldots,n;\ n \geqq 2).$$

Jetzt kann man genau so schließen wie im vorigen Paragraph, daß unsere Gruppe durch Berührungstransformation mit dieser verkürzten Gruppe ähnlich ist.

II. Es sei $c \neq 0$.

Durch die vorige Methode kann man jetzt nicht erreichen, daß alle charakteristischen Funktionen von z frei werden.

Wir vereinfachen zunächst die Zusammensetzungen, indem wir die Funktionen:

$$\overline{X}_i = X_i, \quad \overline{P}_i = \frac{n+1}{c}P_i, \quad \overline{T}_{ik} = T_{ik}, \quad \overline{T}_{11} = \frac{N}{c}, \quad \overline{T}_{ii} = \frac{N}{c} + T_{ii} - T_{11}$$

als neue Basis benutzen. Dann hat nämlich unsere Gruppe genau dieselbe Zusammensetzung wie die allgemeine projektive Gruppe des R_n.

Endlich erreichen wir noch durch die Berührungstransformation:

$$x_i' = -c\,x_i, \quad z' = -c\,z, \quad p_i' = p_i,$$

daß $c = -1$ wird. Benutzen wir jetzt wieder die alten Bezeichnungen, dann enthält unsere Gruppe die charakteristischen Funktionen:

$$(28)\quad \begin{cases} X_i = x_i + \ldots, \quad P_i = -(n+1)p_i + \ldots, \quad T_{ik} = x_i p_k + \ldots, \\ T_{11} = -1 + \ldots, \quad T_{ii} = T_{11} + x_i p_i - x_1 p_1 + \ldots \end{cases}$$

von der Zusammensetzung:

$$(29)\quad \begin{cases} \{X_i X_k\} = 0, \ \{P_i P_k\} = 0, \ \{P_i X_k\} = T_{ki} + \varepsilon_{ik} \sum_\nu T_{\nu\nu}, \ \{P_i T_{k\nu}\} = \varepsilon_{ik} P_\nu, \\ \{X_i T_{k\nu}\} = -\varepsilon_{i\nu} X_k, \quad \{T_{ik} T_{\mu\nu}\} = \varepsilon_{k\mu} T_{i\nu} - \varepsilon_{\nu i} T_{\mu k}. \end{cases}$$

Wir zeigen im folgenden, daß alle Gruppen (28) von der Zusammensetzung (29) ähnlich sind mit der kanonischen Gruppe:

$$(30)\quad \begin{cases} X_i' = x_i' - \frac{1}{n+1} x_i' \sum_\nu x_\nu' p_\nu'; \quad P_i' = -(n+1)p_i', \quad T_{ik}' = x_i' p_k', \\ T_{ii}' = -1 + x_i' p_i'. \ ^5) \end{cases}$$

Zunächst überzeugen wir uns davon, daß unter den Funktionen:

$$\dot{X}_i = \frac{X_i}{T_{11}}, \quad \dot{P}_i = \frac{P_i}{T_{11}}, \quad \dot{T}_{ik} = \frac{T_{ik}}{T_{11}}, \quad \dot{T}_{jj} = \frac{T_{jj}}{T_{11}}$$
$$(i, k = 1, \ldots, n; \ j = 2, \ldots, n; \ i \neq k)$$

stets nur $2n$ voneinander unabhängige vorhanden sind, wie dies auch bei den entsprechenden aus (30) zu gewinnenden Funktionen der Fall ist.

Zu diesem Zweck bilden wir die Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial x_n} & \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial z} & \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial x_n} & \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial z} & \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \dot{T}_{jj}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \dot{T}_{jj}}{\partial x_n} & \frac{\partial \dot{T}_{jj}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{T}_{jj}}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial \dot{T}_{jj}}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \dot{T}_{ik}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \dot{T}_{ik}}{\partial x_n} & \frac{\partial \dot{T}_{ik}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{T}_{ik}}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial \dot{T}_{ik}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$
$$(i, k = 1, \ldots, n; \ j = 2, \ldots, n; \ i \neq k)$$

für das Element von allgemeiner Lage:

$$x_i = p_i = z = 0.$$

---

[5]) Vgl. hierzu (15′) in § 2.

Da auf Grund der Reihenentwicklungen (28):

$$\left(\frac{\partial T_{jj}}{\partial x_k}\right)_0 = \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_k}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial T_{jj}}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial z}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial T_{jj}}{\partial p_k}\right)_0 = \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial p_k}\right)_0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

ist, so sieht man leicht ein, daß für dieses Element sämtliche Glieder der $(2n+1)$-ten bis $(3n-1)$-ten Zeile unserer Matrix verschwinden. Dasselbe gilt für die Elemente der folgenden Zeilen. Demnach verschwinden für $x_i = p_i = z = 0$ sämtliche $(2n+1)$-reihigen Determinanten der Matrix. Die $(2n+1)$-reihigen Determinanten müssen aber auch identisch verschwinden, sonst könnte $x_i = p_i = z = 0$ kein Element von allgemeiner Lage sein. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Um den Beweis für die Ähnlichkeit der Gruppen (28) und (30) zu erbringen, führen wir in beide homogene Veränderliche ein vermöge:

$$x_1 = \mathfrak{x}_1, \ \ldots, \ x_n = \mathfrak{x}_n, \ z = \mathfrak{x}_{n+1}, \ p_i = -\frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{p}_{n+1}}$$

$$\text{bzw.} \quad x_1' = \mathfrak{x}_1', \ \ldots, \ x_n' = \mathfrak{x}_n', \ z' = \mathfrak{x}_{n+1}', \ p_i' = -\frac{\mathfrak{p}_i'}{\mathfrak{p}_{n+1}'}$$

und erhalten:

$$(28') \begin{cases} \mathfrak{X}_i = -\mathfrak{p}_{n+1} X_i = -\mathfrak{x}_i \mathfrak{p}_{n+1} + \ldots, \ \mathfrak{P}_i = -\mathfrak{p}_{n+1} P_i = -(n+1)\mathfrak{p}_i + \ldots, \\ \mathfrak{T}_{ik} = -\mathfrak{p}_{n+1} T_{ik} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{p}_k + \ldots, \ \mathfrak{T}_{11} = -\mathfrak{p}_{n+1} T_{11} = \mathfrak{p}_{n+1} + \ldots, \\ \mathfrak{T}_{ii} = -\mathfrak{p}_{n+1} T_{ii} = \mathfrak{T}_{11} + \mathfrak{x}_i \mathfrak{p}_i - \mathfrak{x}_1 \mathfrak{p}_1 + \ldots, \end{cases}$$

bzw.

$$(30') \begin{cases} \mathfrak{X}_i' = -\mathfrak{x}_i' \left(\mathfrak{p}_{n+1}' + \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{x}_\nu' \mathfrak{p}_\nu' \right), \ \mathfrak{P}_i' = -(n+1)\mathfrak{p}_i', \\ \mathfrak{T}_{ik}' = \mathfrak{x}_i' \mathfrak{p}_k', \quad \mathfrak{T}_{11}' = \mathfrak{p}_{n+1}' + \mathfrak{x}_1' \mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{T}_{ii}' = \mathfrak{p}_{n+1}' + \mathfrak{x}_i' \mathfrak{p}_i'. \end{cases}$$

Die Zusammensetzungen beider Gruppen ergeben sich aus (29):

$$(29') \begin{cases} (\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = 0, \ (\mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_k) = 0, \ (\mathfrak{P}_i \mathfrak{X}_k) = \mathfrak{T}_{ki} + \varepsilon_{ik} \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{T}_{\nu\nu}, \ (\mathfrak{P}_i \mathfrak{T}_{k\nu}) = \varepsilon_{ik} \mathfrak{P}_\nu, \\ (\mathfrak{X}_i \mathfrak{T}_{k\nu}) = -\varepsilon_{i\nu} \mathfrak{X}_k, \quad (\mathfrak{T}_{ik} \mathfrak{T}_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} \mathfrak{T}_{i\nu} - \varepsilon_{\nu i} \mathfrak{T}_{\mu k}. \end{cases}$$

Auf Grund des letzten Beweises sind in (30') wie in (28') keine $2n+2$ voneinander unabhängige Funktionen vorhanden. Daher lassen sich alle $\mathfrak{T}_{ik}$ und $\mathfrak{T}_{ii}$ $(i \neq 1)$ als homogene Funktionen 1. Grades von $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{T}_{11}$ darstellen. Dasselbe gilt für die entsprechenden Funktionen von (30'). (28') und (30') sind nun miteinander ähnlich, wenn die eben erwähnten homogenen Funktionen 1. Grades in beiden Fällen dieselben sind. Diese bestimmen sich aber aus folgenden Differentialgleichungen.

Die Klammerrelation $(\mathfrak{P}_i \mathfrak{T}_{k\nu}) = \varepsilon_{ik} \mathfrak{P}_\nu$ liefert:

$$\sum_\tau \left(\mathfrak{T}_{\tau 1} + \varepsilon_{1\tau} \sum_\varrho \mathfrak{T}_{\varrho\varrho} \right) \frac{\partial \mathfrak{T}_{k\nu}}{\partial \mathfrak{X}_\tau} + \mathfrak{P}_1 \frac{\partial \mathfrak{T}_{k\nu}}{\partial \mathfrak{T}_{11}} = \varepsilon_{1k} \mathfrak{P}_\nu ,$$

$$\sum_\tau \left(\mathfrak{T}_{\tau i} + \varepsilon_{i\tau} \sum_\varrho \mathfrak{T}_{\varrho\varrho} \right) \frac{\partial \mathfrak{T}_{k\nu}}{\partial \mathfrak{X}_\tau} = \varepsilon_{ik} \mathfrak{P}_\nu \qquad (i = 2, \ldots, n);$$

ebenso ergibt $(\mathfrak{X}_i \mathfrak{T}_{k\nu}) = -\varepsilon_{i\nu} \mathfrak{X}_k$:

$$\sum_\tau \left(\mathfrak{T}_{1\tau} + \varepsilon_{1\tau} \sum_\varrho \mathfrak{T}_{\varrho\varrho} \right) \frac{\partial \mathfrak{T}_{k\nu}}{\partial \mathfrak{P}_\tau} + \mathfrak{X}_1 \frac{\partial \mathfrak{T}_{k\nu}}{\partial \mathfrak{T}_{11}} = \varepsilon_{1\nu} \mathfrak{X}_k ,$$

$$\sum_\tau \left(\mathfrak{T}_{i\tau} + \varepsilon_{i\tau} \sum_\varrho \mathfrak{T}_{\varrho\varrho} \right) \frac{\partial \mathfrak{T}_{k\nu}}{\partial \mathfrak{P}_\tau} = \varepsilon_{i\nu} \mathfrak{X}_k \qquad (i = 2, \ldots, n).$$

Dazu kommt noch die Homogeneitätsbedingung:

$$\sum_\tau \mathfrak{X}_\tau \frac{\partial \mathfrak{T}_{k\nu}}{\partial \mathfrak{X}_\tau} + \sum_\tau \mathfrak{P}_\tau \frac{\partial \mathfrak{T}_{k\nu}}{\partial \mathfrak{P}_\tau} + \mathfrak{T}_{11} \frac{\partial \mathfrak{T}_{k\nu}}{\partial \mathfrak{T}_{11}} = \mathfrak{T}_{k\nu} .$$

Diese $2n + 1$ Gleichungen sind voneinander unabhängig, da die Determinante aus den Koeffizienten der linken Seiten nicht verschwindet, wie aus den Reihenentwicklungen (28′) hervorgeht. Sie genügen demnach zur Bestimmung der $\mathfrak{T}_{k\nu}$ als Funktionen der $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{T}_{11}$. Dieselben Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen gelten für die $\mathfrak{T}'_{k\nu}$. Die $\mathfrak{T}'_{k\nu}$ kann man aber vermöge (30′) als Funktionen der $\mathfrak{X}'_i, \mathfrak{P}'_i, \mathfrak{T}'_{11}$ angeben. Darin liegt, daß sich die $\mathfrak{T}_{k\nu}$ bzw. $\mathfrak{T}'_{k\nu}$ auf dieselbe Weise durch $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{P}_i, \mathfrak{T}_{11}$ bzw. $\mathfrak{X}'_i, \mathfrak{P}'_i, \mathfrak{T}'_{11}$ ausdrücken lassen.

Die Berührungstransformation, die die Überführung von (28) in (30) leistet, gewinnen wir aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{X}'_i = \mathfrak{X}_i, \quad \mathfrak{P}'_i = \mathfrak{P}_i, \quad \mathfrak{T}'_{11} = \mathfrak{T}_{11} .$$

Schreiben wir deren Auflösungen sogleich in nichthomogenen Koordinaten, so erhalten wir unter Benutzung der Abkürzung:

$$\varkappa = \frac{T_{11} - \sqrt{T_{11}^2 - \frac{4}{n+1} X_1 P_1 + \frac{4}{(n+1)^2} \sum_\nu X_\nu P_\nu}}{\frac{2}{n+1} X_1 P_1 - \frac{2}{(n+1)^2} \sum_\nu X_\nu P_\nu} = \frac{1}{T_{11}} + \ldots = -1 + \ldots ,$$

$$x'_i = -\varkappa X_i = x_i + \ldots , \quad p'_i = \frac{P_i}{(n+1) T_{11} - \varrho X_1 P_1} = p_i + \ldots \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Weiter folgt aus $\mathfrak{T}'_{11} = \mathfrak{T}_{11}$ oder $\mathfrak{p}'_{n+1} + \mathfrak{x}'_1 \mathfrak{p}'_1 = -\mathfrak{p}_{n+1} T_{11}$:

$$\frac{\mathfrak{p}_{n+1}}{\mathfrak{p}'_{n+1}} = \varrho = \frac{-1 + x'_1 p'_1}{T_{11}} = \frac{-1 + x_1 p_1 + \ldots}{-1 + \ldots} = 1 + \ldots .$$

Aus

$$dz' - \sum_{\nu=1}^{n} p'_\nu dx'_\nu = \varrho\,(dz - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu dx_\nu)$$

erhält man dann durch Quadratur:

$$z' = z + \dots .$$

Damit ist bewiesen, daß sich die Gruppe (28) durch eine reguläre Berührungstransformation in (30) überführen läßt.

Wir fassen die Ergebnisse des letzten Paragraphen zusammen:

Jede Gruppe von Berührungstransformationen in den Veränderlichen $z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, *die in der Umgebung des Wertsystems* $x_i = p_i = z = 0$ *von allgemeiner Lage die charakteristischen Funktionen:*

$$1 + \dots,\quad x_i + \dots,\quad p_i + \dots,\quad x_i p_k + \dots,\quad x_i p_i - x_k p_k + \dots$$
$$(i \neq k;\ i, k = 1, \dots, n;\ n \geqq 2),$$

aber sonst keine von nullter, erster und zweiter Stufe enthält, ist durch Berührungstransformation ähnlich, entweder mit der Gruppe:

$$1,\ x_i,\ p_i,\ x_i p_k,\ x_i p_i - x_k p_k \quad (i \neq k;\ i, k = 1, \dots, n;\ n \geqq 2)$$

oder mit der Gruppe:

$$x_i - \frac{1}{n+1} x_i \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu,\quad -(n+1)\,p_i,\quad x_i p_k,\quad -1 + x_i p_i$$
$$(i \neq k;\ i, k = 1, \dots, n;\ n \geqq 2).$$

(Eingegangen am 11. Mai 1927.)

Über lineare Limitierungsverfahren.

Von

St. Mazur in Lwów (Polen).

Die folgenden Untersuchungen betreffen den Vergleich von Konvergenzfeldern linearer Limitierungsverfahren. Insbesondere gibt Satz IV (unter gewissen Einschränkungen) die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß das Konvergenzfeld eines Verfahrens in dem eines anderen enthalten sei. Herr H. Steinhaus stellte die Frage, ob bei den permanenten Verfahren dann die verallgemeinerten Limites gleich sein müssen. Satz VI bringt eine negative Antwort auf diese Frage. Es zeigt sich nämlich, daß es permanente Verfahren mit gemeinsamem Konvergenzfelde gibt, die gewisse Folgen zu verschiedenen Werten limitieren. Dagegen ist dieselbe Frage unter gewissen Voraussetzungen, z. B. bei Beschränktheit der Folgen, zu bejahen, wie Sätze VII und VIII zeigen.

Ordnet man die Verfahren nach ihrer Güte, d. h. nach der Größe des Summationsbereiches, so entsteht die Frage, ob zwischen zwei vergleichbare Verfahren sich immer ein drittes einschalten läßt. Satz XII bringt eine negative Antwort auf diese Frage.

§ 1.

Es sei

$$(A)\quad \begin{matrix} \alpha_{0,0}, & \alpha_{0,1}, & \dots, \\ \alpha_{1,0}, & \alpha_{1,1}, & \dots, \\ \dots & \dots & \end{matrix}$$

eine beliebige Matrix komplexer Zahlen. Wenn bei einer gegebenen komplexen Folge $\{u_m\}$ jede der Reihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{n,m}\, u_m$$

konvergiert und die entsprechende Summenfolge $\{A_n(u_0, u_1, \dots)\}$ eine endliche Grenze u besitzt, so sagen wir, daß die Folge $\{u_m\}$ mittels des

der Matrix A entsprechenden Verfahrens zum Werte u limitierbar — kurz A-limitierbar (zum Werte u) ist. Die eben erklärten Verfahren nennen wir *lineare Limitierungsverfahren*, und diese, für welche stets $\alpha_{n,n} \neq 0$ und $\alpha_{n,m} = 0$ für $m > n$ ist, erklären wir als *normale Verfahren*. Besondere Beachtung verdienen natürlich diejenigen Verfahren, mittels deren alle konvergenten Folgen limitierbar sind; wir bezeichnen sie nach Schur als *konvergenzerhaltend* und im besonderen als *permanent*, wenn sie jede konvergente Folge zu ihrem gewöhnlichen Grenzwerte limitieren. Bekanntlich haben Kojima und Schur eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür gegeben, daß ein *lineares Verfahren* konvergenzerhaltend sei; sie haben nämlich den folgenden Satz bewiesen[1]):

Satz I. *Ein Verfahren A ist dann und nur dann konvergenzerhaltend, wenn*

1. *für jedes m der endliche* $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,m} = \alpha_m$ *existiert,*

2. *jede der Reihen* $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{n,m}|$ *konvergiert und die Summenfolge beschränkt ist — und*

3. *der endliche* $\lim_{n\to\infty} A_n(1, 1, \ldots) = \alpha$ *existiert.*

Bemerkung 1. Aus dem Beweise des obigen Satzes folgt ohne weiteres, daß dafür, daß ein Verfahren jede gegen Null konvergente Folge limitiere, die Bedingungen 1 und 2 dieses Satzes notwendig und hinreichend sind.

Bemerkung 2. Wenn ein Verfahren die Bedingungen 1 und 2 des Satzes I erfüllt, so ist eine gegen Null konvergente Folge zum Werte

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m u_m$$

limitierbar. Ist nämlich $\lim_{m\to\infty} u_m = 0$ und die Bedingung 2 erfüllt, so ist die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{n,m} u_m$ in bezug auf n gleichmäßig konvergent; es genügt nur noch die Bedingung 1 anzuwenden, um sich von der Richtigkeit dieser Bemerkung zu überzeugen.

Bemerkung 3. Wenn ein Verfahren alle Bedingungen des Satzes I erfüllt, so ist jede gegen u konvergente Folge $\{u_m\}$ zum Werte

$$\alpha u + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m (u_m - u)$$

limitierbar. Es ist nämlich $u_m = u + (u_m - u)$; es folgt nun aus der

[1]) Kojima, The Tohôku Math. Journal **12** (1917), S. 297. — I. Schur, Journal f. reine u. angewandte Mathematik **151** (1920), S. 79.

linearen homogenen Struktur des Verfahrens, der Bedingung 3 und der Bemerkung 2 die Richtigkeit unserer Behauptung.

Indem wir den Satz I und die Bemerkung 3 berücksichtigen, bekommen wir ohne Schwierigkeit den folgenden, von Toeplitz[2]) herrührenden

Satz II. *Dafür, daß ein Verfahren permanent sei, ist notwendig und hinreichend, daß alle Bedingungen des Satzes* I *erfüllt seien, wobei* $\alpha_m = 0 \ (m = 0, 1, 2, \ldots)$, $\alpha = 1$.

Indem wir das Konvergenzfeld eines Verfahrens A als die Menge aller A-limitierbaren Folgen und das identische Verfahren als das der Matrix

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0, & \ldots \\ 0, & 1, & 0, & \ldots \\ 0, & 0, & 1, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

entsprechende erklären, sehen wir, daß der Satz I die notwendigen und hinreichenden Bedingungen enthält dafür, daß das Konvergenzfeld des identischen Verfahrens eine Teilmenge dessen des A-Verfahrens sei. Man kann nun allgemeiner fragen: Was für Bedingungen charakterisieren den Fall, daß bei zwei gegebenen Verfahren A und B, welche den Matrizes

$$(A) \quad \begin{matrix} a_{0,0}, & a_{0,1}, & \ldots, \\ a_{1,0}, & a_{1,1}, & \ldots, \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \qquad \text{bzw.} \ (B) \quad \begin{matrix} b_{0,0}, & b_{0,1}, & \ldots, \\ b_{1,0}, & b_{1,1}, & \ldots, \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

entsprechen, das Konvergenzfeld des A-Verfahrens eine Teilmenge dessen des B-Verfahrens ist? Im folgenden beantworten wir diese Frage für den Fall, daß A ein normales Verfahren ist.

§ 2.

Wir setzen also voraus, daß A ein normales, B ein beliebiges Verfahren ist. Dann besitzt das unendliche Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_0 &= a_{0,0} x_0, \\ y_1 &= a_{1,0} x_0 + a_{1,1} x_1, \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ y_n &= a_{n,0} x_0 + a_{n,1} x_1 + \ldots + a_{n,n} x_n, \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \end{aligned}$$

für jede Folge $\{y_n\}$ genau eine Lösung. Wenn $y_n = 1$ ist $(n = 0, 1, \ldots)$, so sei sie mit $\{\xi_n\}$ bezeichnet; wenn für ein gewisses m $y_m = 1$ und sonst

[2]) Prace matematyczno-fizyczne 22 (1911), S. 113.

Null ist — mit $\{\xi_{n,m}\}$. Es bestehen dann die Gleichungen

$$x_n = \xi_{n,0}\, y_0 + \xi_{n,1}\, y_1 + \ldots + \xi_{n,n}\, y_n .$$

Dies vorausgeschickt beweisen wir zunächst den folgenden

Satz III. *Dafür, daß für eine gegebene Folge $\{c_n\}$ und jede A-limitierbare Folge $\{u_n\}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

1. *die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi_n$ konvergent ist,*

2. *jede der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi_{n,m}$ konvergent ist — und*

3. *eine endliche reelle positive Zahl K existiert, derart, daß $\sum_{n=0}^{r} |c_n \xi_{n,n} + c_{n+1}\xi_{n+1,n} + \ldots + c_r \xi_{r,n}| < K$ für alle r ist.*

Beweis. Wenn man

$$A_n(u_0, u_1, \ldots) = a_{n,0}\, u_0 + a_{n,1}\, u_1 + \ldots + a_{n,n}\, u_n$$

setzt, so ist nach dem obigen

$$u_n = \xi_{n,0} A_0(u_0, u_1, \ldots) + \xi_{n,1} A_1(u_0, u_1, \ldots) + \ldots + \xi_{n,n} A_n(u_0, u_1, \ldots)$$

und darum

$$\sum_{n=0}^{r} c_n u_n = \sum_{n=0}^{r} (c_n \xi_{n,n} + c_{n+1}\xi_{n+1,n} + \ldots + c_r \xi_{r,n}) A_n(u_0, u_1, \ldots).$$

Die Bedingungen, um die es sich handelt, sind also diejenigen, unter denen das Verfahren, dessen r-te Zeile die Form

$$c_0 \xi_{0,0} + c_1 \xi_{1,0} + \ldots + c_r \xi_{r,0},\ c_1 \xi_{1,1} + c_2 \xi_{2,1} + \ldots + c_r \xi_{r,1},\ \ldots,$$
$$c_r \xi_{r,r},\ 0, 0, \ldots$$

hat, konvergenzerhaltend ist; nach dem Satz I sind es ersichtlich die Bedingungen 1 bis 3.

Bemerkung 4. Wenn die Bedingungen des Satzes III erfüllt sind und die Folge $\{u_n\}$ zum Werte U A-limitierbar ist, so findet die folgende Gleichung statt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n = U \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi_n + \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \xi_{n,n} + c_{n+1}\xi_{n+1,n} + \ldots)[A_n(u_0, u_1 \ldots) - U].$$

Dies folgt aus dem Beweise des letzten Satzes unter Heranziehung der Bemerkung 3.

Jetzt können wir leicht beweisen, daß die folgende Behauptung wahr ist:

Satz IV. *Dafür, daß das Konvergenzfeld des A-Verfahrens eine Teilmenge dessen des B-Verfahrens sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

1. *die Folge* $\{\xi_n\}$ *zu einem gewissen Werte* α *B-limitierbar ist,*

2. *jede Folge* $\{\xi_{n,1}\}, \{\xi_{n,2}\}, \ldots, \{\xi_{n,m}\}, \ldots$ *zu einem gewissen Werte* α_1 *bzw.* α_2 *bzw.* ... *bzw.* α_m ... *B-limitierbar ist,*

3. *für jedes* p *eine reelle positive endliche Zahl* K_p *existiert, derart, daß* $\sum_{n=0}^{r} |b_{p,n}\xi_{n,n} + b_{p,n+1}\xi_{n+1,n} + \ldots + b_{p,r}\xi_{r,n}| < K_p$ *ist — und*

4. *eine reelle positive endliche Zahl* K *existiert, derart, daß stets* $\sum_{n=0}^{\infty} |b_{p,n}\xi_{n,n} + b_{p,n+1}\xi_{n+1,n} + \ldots| < K$ *ist.*

Beweis. Die angegebenen Bedingungen sind hinreichend. Setzen wir nämlich voraus, daß sie erfüllt sind und es sei $\{u_n\}$ eine beliebige zum Werte U A-limitierbare Folge. Nach dem Satz III folgt aus den Bedingungen 1 bis 3, daß für jedes p die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{p,n} u_n \tag{1}$$

konvergiert; außerdem folgt aus der Bemerkung 4, daß stets die Gleichheit

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{p,n} u_n = U \sum_{n=0}^{\infty} b_{p,n} \xi_n + \sum_{n=0}^{\infty} (b_{p,n}\xi_{n,n} + b_{p,n+1}\xi_{n+1,n} + \ldots)[A_n(u_0, u_1 \ldots) - U] \tag{2}$$

stattfindet.

Wir setzen

$$\alpha_{p,n} = b_{p,n}\xi_{n,n} + b_{p,n+1}\xi_{n+1,n} + \ldots \quad (p, n = 0, 1, \ldots)$$

und bilden die Matrix

$$(\mathfrak{A}) \quad \begin{matrix} \alpha_{0,0}, & \alpha_{0,1}, & \ldots, \\ \alpha_{1,0}, & \alpha_{1,1}, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Da die Bedingungen 2 und 4 erfüllt sind, so folgt aus der Bemerkung 1, daß jede gegen Null konvergente Folge $\mathfrak{A}$-limitierbar ist. Weil nun $\lim_{n\to\infty} [A_n(u_0, u_1, \ldots) - U] = 0$ ist, so existiert der endliche

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{p,n} [A_n(u_0, x_1, \ldots) - U].$$

Der erste Summand in (2) hat zufolge der Bedingung 1 einen Grenzwert; wie wir eben gesehen haben, hat ihn auch der zweite; es hat ihn also auch ihre Summe, d. h. $\sum_{n=0}^{\infty} b_{p,n} u_n$. Die Folge $\{u_n\}$ ist also B-limitierbar, w. z. b. w.

Die Notwendigkeit folgt ebenso leicht. Die Folgen $\{\xi_n\}$ und $\{\xi_{n,1}\}$, $\{\xi_{n,2}\} \ldots \{\xi_{n,m}\} \ldots$ sind A-limitierbar; dann sind sie also auch B-limitier-

bar; damit ist die Notwendigkeit der Bedingungen 1 und 2 bewiesen. Weiter muß die Reihe (1) für jede A-limitierbare Folge $\{u_n\}$ (und jedes p) konvergieren; unter Heranziehung des Satzes III folgt daraus die Notwendigkeit von 3. Wenn aber 1 erfüllt ist, so folgt aus (2), daß für jede zum Werte U A-limitierbare Folge $\{u_n\}$ die Folge $\{A_n(u_0, u_1, \ldots) - U\}$ $\mathfrak{A}$-limitierbar ist. Es sei jetzt $\{\varepsilon_n\}$ eine beliebige gegen Null konvergente Folge. Die Folge $\{u_n\}$, welche die Lösung des unendlichen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= a_{0,0}\, u_0, \\
\varepsilon_1 &= a_{1,0}\, u_0 + a_{1,1}\, u_1, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_n &= a_{n,0}\, u_0 + a_{n,1}\, u_1 + \ldots + a_{n,n}\, u_n \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

bildet, ist A-limitierbar zum Werte $U = 0$, und daher ist die Folge $\{A_n(u_0, u_1, \ldots) - U\} \equiv \{\varepsilon_n\}$ $\mathfrak{A}$-limitierbar. Das Verfahren $\mathfrak{A}$ limitiert daher jede gegen Null konvergente Folge; daraus folgt wegen der Bemerkung 1 die Notwendigkeit der Bedingung 4.

Bemerkung 5. Wenn die Bedingungen des Satzes IV erfüllt sind, so ist jede zum Werte U A-limitierbare Folge $\{u_n\}$ zum Werte

$$\alpha U + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m [A_m(u_0, u_1, \ldots) - U]$$

B-limitierbar. Dies folgt sofort aus dem Beweise des Satzes IV und der Bemerkung 2.

Aus dem Satz IV und der Bemerkung 5 folgt sofort der Satz

Satz V. *Dafür, daß jede A-limitierbare Folge zu demselben Wert B-limitierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen des Satzes* IV *erfüllt sind, und $\alpha_m = 0$ $(m = 0, 1, \ldots)$, $\alpha = 1$ ist.*

§ 3.

Wie wir in der Einleitung angekündigt haben, bringen wir jetzt ein Beispiel zweier vergleichbarer permanenter Limitierungsverfahren, die nicht alle limitierbaren Folgen zu denselben Grenzwerten limitieren; es gilt nämlich der folgende Satz:

Satz VI. *Es gibt normale permanente Verfahren mit gemeinsamem Konvergenzfelde, die gewisse Folgen zu verschiedenen Werten limitieren.*

Beweis. Es sei $\{\vartheta_n\}$ eine den folgenden Forderungen genügende, sonst aber beliebige Folge:

$$\vartheta_n \neq 0, \quad |\vartheta_n| < 1, \quad \lim_{n\to\infty} \vartheta_n = 0.$$

Wir erklären jetzt zwei lineare Limitierungsverfahren A und B folgendermaßen:

$$(1)\quad \begin{cases} A_0(u_0, u_1, \ldots) = B_0(u_0, u_1, \ldots) = \vartheta_0 u_0, \\ A_{n+1}(u_0, u_1, \ldots) = u_n + \vartheta_{n+1} u_{n+1}, \\ B_{n+1}(u_0, u_1, \ldots) = [1 + (-1)^n \vartheta_0 \vartheta_1 \ldots \vartheta_n] u_n + \vartheta_{n+1} u_{n+1} \\ \qquad\qquad (n = 0, 1, \ldots). \end{cases}$$

Ersichtlich sind diese Verfahren normal, weil $\vartheta_n \neq 0$, und permanent, weil $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_n = 0$ ist. Um zu beweisen, daß ihre Konvergenzfelder identisch sind, bemerken wir vor allem, daß wenn wir

$$\Theta_n = \prod_{k=0}^{n} [1 + (-1)^k \vartheta_0 \vartheta_1 \ldots \vartheta_k] \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

setzen, wir $\Theta_n \neq 0$ haben, und überdies bestehen, wie man leicht mittels vollständiger Induktion unter Bezugnahme auf (1) verifiziert, die folgenden Gleichungen:

$$(2)\quad (-1)^n \vartheta_0 \vartheta_1 \ldots \vartheta_n u_n$$

$$= \begin{cases} A_0(u_0, u_1, \ldots) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \vartheta_0 \vartheta_1 \ldots \vartheta_k A_{k+1}(u_0, u_1, \ldots) \\ \Theta_{n-1} \left[B_0(u_0, u_1, \ldots) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\vartheta_0 \vartheta_1 \ldots \vartheta_k}{\Theta_k} B_{k+1}(u_0, u_1, \ldots) \right]. \end{cases}$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_n = 0$ ist, so ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \vartheta_0 \vartheta_1 \ldots \vartheta_k$$

absolut konvergent, und daher konvergiert auch die Folge Θ_n gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert. Daraus folgern wir wiederum die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\vartheta_0 \vartheta_1 \ldots \vartheta_k}{\Theta_k}.$$

Die Gleichungen (2) und die obigen Bemerkungen zeigen, daß die Folge $\{(-1)^n \vartheta_0 \vartheta^0 \vartheta_1 \ldots \vartheta_n u_n\}$ konvergiert, wenn es nur wenigstens eine der beiden Folgen $\{A_n(u_0, u_1, \ldots)\}$, $\{B_n(u_0, u_1, \ldots)\}$ tut. Aus den aus (1) folgenden Gleichungen

$$B_{n+1}(u_0, u_1, \ldots) = A_{n+1}(u_0, u_1, \ldots) + (-1)^n \vartheta_0 \vartheta_1 \ldots \vartheta_n u_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

sieht man, daß die beiden Limitierungsverfahren A und B ein gemeinsames Konvergenzfeld haben. Es genügt nun zu bemerken, daß die Folge $\left\{\frac{(-1)^n}{\vartheta_0 \vartheta_1 \ldots \vartheta_n}\right\}$ zum Werte Null A-limitierbar, aber zum Werte Eins B-limitierbar ist.

Trotzdem kann man folgendes behaupten:

Satz VII. *Wenn A ein normales permanentes, B ein beliebiges permanentes Limitierungsverfahren ist und das Konvergenzfeld von A in dem von B enthalten ist, so ist jede beschränkte A-limitierbare Folge zu demselben Wert B-limitierbar.*

Beweis. Es sei $\{u_n\}$ eine beliebige zum Werte U A-limitierbare Folge, die Zahlen $\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \ldots$ sollen dieselbe Bedeutung haben, wie im Satz IV; entsprechend der Bemerkung 5 ist die Folge $\{u_m\}$ B-limitierbar zum Werte

$$\mathfrak{U} = \alpha U + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m [A_m(u_0, u_1, \ldots) - U].$$

Es sei m eine beliebige ganze nicht negative Zahl und es möge $u'_m = 1$, $u'_n = 0$ für $n \neq m$ gesetzt werden. Aus der obigen Gleichung wird dann

$$\sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n a_{n,m} = 0.$$

Da m beliebig ist, gilt hiernach

$$\begin{aligned} \alpha_0 a_{0,0} + \alpha_1 a_{1,0} + \alpha_2 a_{2,0} + \ldots &= 0, \\ \alpha_1 a_{1,1} + \alpha_2 a_{2,1} + \ldots &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned} \tag{3}$$

Setzen wir jetzt $u''_n = 1$ $(u = 0, 1, \ldots)$, so kommt analog

$$\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (a_{n,0} + a_{n,1} + \ldots + a_{n,n} - 1) = 1. \tag{4}$$

Nun konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$$

absolut und überdies ist wegen der Permanenz des A-Verfahrens die Folge $\{|a_{n,0}| + |a_{n,1}| + \ldots + |a_{n,n}|\}$ beschränkt. Daher konvergiert die Reihe, welche aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n a_{n,0} + \alpha_n a_{n,1} + \ldots + \alpha_n a_{n,n})$$

durch Weglassen der Klammern entsteht, absolut. Wenn wir jetzt (3) berücksichtigen, folgt daraus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (a_{n,0} + a_{n,1} + \ldots + a_{n,n}) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m a_{m,m} + \alpha_{m+1} a_{m+1,m} + \ldots) = 0.$$

Aus (4) bekommen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \alpha - 1,$$

so daß eine jede zum Wert U A-limitierbare Folge $\{u_m\}$, zum Werte

$$U + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m A_m(u_0, u_1, \ldots)$$

B-limitierbar ist. Da aber die Folge $\{u_m\}$ beschränkt ist, so folgt analog wie oben im Falle der Folge $1, 1, \ldots$ (wir berücksichtigen jetzt die Beschränktheit von $|a_{n,0} u_0| + |a_{n,1} u_1| + \ldots + |a_{n,n} u_n|$), daß

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m A_m(u_0, u_1, \ldots) = 0$$

ist.

Als B-Limes bleibt dann U allein übrig, womit der Satz bewiesen ist.

Eine leichte Folgerung des letzten Satzes ist der

Satz VIII. *Wenn die Verfahren A und B den Bedingungen des Satzes* VII *genügen und überdies fast alle Folgen $\{\xi_{n,m}\}$ $(m = 0, 1, \ldots)$ beschränkt sind, dann ist jede A-limitierbare Folge zu demselben Werte B-limitierbar.*

Beweis. Jede Folge $\{\xi_{n,m}\}$ $(m = 0, 1, \ldots)$ ist A-limitierbar zum Werte Null; wenn also fast alle Folgen beschränkt sind, dann sind nach dem Satz VII fast alle α_n gleich Null. Aus den Gleichungen (3) im Beweise des vorigen Satzes sehen wir, daß alle α_n Null sein müssen. Da wir aber oben erwiesen haben, daß jede zum Werte U A-limitierbare Folge $\{u_n\}$ zum Werte

$$U + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m A_m(u_0, u_1, \ldots)$$

B-limitierbar ist, so ist der Satz erwiesen.

§ 4.

Es sei k eine reelle positive Zahl und $C^{(k)}$ das entsprechende *Cesàro'sche Verfahren*, d. h. dasjenige Verfahren, bei dem stets

$$C_m^{(k)}(u_0, u_1, \ldots) = \frac{\binom{n+k-1}{n}}{\binom{n+k}{n}} u_0 + \frac{\binom{n+k-2}{n-1}}{\binom{n+k}{n}} u_1 + \ldots + \frac{\binom{k-1}{0}}{\binom{n+k}{n}} u_n$$

ist.

Es ist leicht einzusehen, daß hier $\xi_n = 1$ ist $(n = 0, 1, \ldots)$. Wir werden zeigen, daß

$$\xi_{n,m} = (-1)^{n-m} \binom{k}{n-m} \binom{m+k}{m}$$

ist für $n \geqq m$ ($\xi_{n,m}$ ist für $n < m$ und jedes Verfahren Null).

Die Behauptung ist richtig für $n = m$; wenn wir ihre Richtigkeit für $n = m, m+1, \ldots, n_0$ voraussetzen, so erhalten wir

$$\sum_{p=0}^{n_0-m+1} \binom{k+n_0-m-p}{1+n_0-m-p} \xi_{m+p,\,m}$$
$$= \binom{m+k}{m} \sum_{p=0}^{n_0-m} (-1)^p \binom{k}{p} \binom{k+n_0-m-p}{1+n_0-m-p} + \xi_{n+1,\,m} = 0 .$$

Daraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung, wenn es uns noch gelingt zu beweisen, daß

$$\sum_{p=0}^{r+1} (-1)^p \binom{k}{p} \binom{k+r-p}{1+r-p} = 0 \quad \text{ist für} \quad r = 0, 1, \ldots .$$

Um aber dies einzusehen, genügt die Bemerkung, daß für $0 \leqq x < 1$

$$\left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{k}{r} x^r\right]\left[\sum_{r=0}^{\infty} \binom{k-1+r}{r} x^r\right] = (1-x)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k-1+r}{r} x^r = 1$$

ist, und die *Cauchysche Reihenmultiplikation* anzuwenden.

Unter Bezugnahme auf Satz III können wir leicht den folgenden Satz beweisen:

Satz IX. *Dafür, daß für jede $C^{(k)}$-limitierbare Folge $\{u_n\}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ konvergiere, ist notwendig und hinreichend, daß*

1. *die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert;*

2. *eine endliche reelle positive Zahl K derart existiert, daß stets*

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{r+k}{r} \left| \binom{k}{0} c_r - \binom{k}{1} c_{r+1} + \ldots + (-1)^{n-r} \binom{k}{n-r} c_n \right| < K \text{ ist.}$$

Wenn wir berücksichtigen, daß die Folge $\{\xi_n\}$ gegen 1 und jede der Folgen $\{\xi_{n,m}\}$ $(m = 0, 1, \ldots)$ gegen Null konvergiert, liefert uns Satz IV den

Satz X. *Das Konvergenzfeld eines der Matrix $\{a_{n,m}\}$ $(n, m = 0, 1, \ldots)$ entsprechenden konvergenzerhaltenden Verfahrens enthält das Konvergenzfeld des $C^{(k)}$-Verfahrens dann und nur dann, wenn*

1. *für jedes p eine endliche reelle positive Zahl K_p existiert, derart, daß stets* $\sum_{r=0}^{n} \binom{r+k}{r} \left| \binom{k}{0} a_{p,r} - \binom{k}{1} a_{p,r+1} + \ldots + (-1)^{n-r} \binom{k}{n-r} a_{p,n} \right| < K_p$ *ist;*

2. *eine endliche reelle positive Zahl K existiert derart, daß stets*

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{r+k}{r} \left| \binom{k}{0} a_{p,r} - \binom{k}{1} a_{p,r+1} + \ldots \right| < K \text{ ist.}$$

Endlich geben uns die Sätze V bzw. VIII sofort den

Satz XI. *Wenn das Konvergenzfeld des $C^{(k)}$-Verfahrens einen Teil des Konvergenzfeldes eines anderen permanenten Limitierungsverfahrens A bildet, dann ist jede $C^{(k)}$-limitierbare Folge A-limitierbar zu demselben Werte*[3]).

§ 5.

Es sei A ein normales Limitierungsverfahren, welches der Matrix

$$(A)\quad \begin{matrix} a_{0,0}, & 0, & 0, \dots \\ a_{1,0}, & a_{1,1}, & 0, \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

entspricht; es sei weiter $\{\vartheta_n\}$ eine beliebige komplexe Folge, die den Bedingungen genügt: $\vartheta_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_n = 0$. Wir erklären jetzt die Matrix

$$(B)\quad \begin{matrix} b_{0,0}, & b_{0,1}, \dots \\ b_{1,0}, & b_{1,1}, \dots \\ \dots & \dots \end{matrix}$$

folgendermaßen:

$$b_{n,m} = \begin{cases} a_{n-1,m} + \vartheta_n a_{n,m} & \text{für } n > m, \\ \vartheta_n a_{n,n} & \text{für } n = m, \quad (m = 0, 1, \dots), \\ 0 & \text{für } n < m. \end{cases}$$

Das der Matrix B entsprechende Limitierungsverfahren ist ersichtlich normal.

Es bestehen ferner die folgenden Gleichungen:

$$B_0(u_0, u_1, \dots) = \vartheta_0 A_0(u_0, u_1, \dots),$$
$$B_{n+1}(u_0, u_1, \dots) = A_n(u_0, u_1, \dots) + \vartheta_{n+1} A_{n+1}(u_0, u_1, \dots)$$

für jede Folge $\{u_n\}$ und $n = 0, 1, \dots$.

Es folgt daraus, daß jede A-limitierbare Folge B-limitierbar ist (und zwar zu demselben Grenzwerte) nicht aber umgekehrt.

Wir zeigen jetzt, daß für die B-Limitierbarkeit einer beliebigen Folge $\{u_n\}$ die folgende Bedingung notwendig und hinreichend ist: Es existiert eine Zahl α und eine konvergente Folge $\{v_n\}$ derart, daß

$$v_n + \frac{(-1)^n}{\vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_n} \alpha = A_n(u_0, u_1, \dots)$$

ist.

---

[3]) Die Sätze IX bis XI für den Fall $k = 1$ bilden den Inhalt der Note des Herrn W. Orlicz: Zur allgemeinen Limitierungstheorie, The Tohôku Math. Journ. **26** (1926), S. 233—237.

Daß diese Bedingung hinreichend ist, leuchtet ohne weiteres ein. Wir beweisen jetzt nur ihre Notwendigkeit. Wir überzeugen uns vor allem mittels einer leichten Induktion, daß

$$(-1)^n \vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_n A_n(u_0, u_1, \dots) = B_0(u_0, u_1, \dots) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_k B_{k+1}(u_0, u_1, \dots)$$

für $n = 1, 2, \dots$.

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_k$ absolut konvergiert und die Folge $\{u_n\}$ laut Voraussetzung B-limitierbar ist, konvergiert die Folge

$$\{\Theta_n\} \equiv \{(-1)^n \cdot \vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_n A_n(u_0, u_1, \dots)\}.$$

Wir bezeichnen ihre Grenze mit Θ und setzen

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_n} (\Theta_n - \Theta),$$
$$\alpha = \Theta.$$

Es ist dann stets

$$A_n(u_0, u_1, \dots) = (-1)^n \frac{\Theta_n}{\vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_n} = v_n + \frac{(-1)^n}{\vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_n} \cdot \alpha,$$

und wegen der Gleichungen

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_n} (\Theta_n - \Theta) = B_{n+1}(u_0, u_1, \dots) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \vartheta_{n+1} \vartheta_{n+2} \dots \vartheta_{n+k} \cdot B_{n+k+1}(u_0, u_1, \dots)$$

ist die Folge $\{v_n\}$ konvergent, w. z. b. w.

Wir bemerken noch, daß für die A-Limitierbarkeit die obigen Bedingungen und die Bedingungen $\alpha = 0$ notwendig und hinreichend sind.

Es sei jetzt C ein Limitierungsverfahren, dessen Konvergenzfeld das des A-Verfahrens als echte Teilmenge enthält und zugleich in dem des B-Verfahrens enthalten ist. Aus dem zweiten Teil der obigen Behauptung folgt, daß für jede C-limitierbare Folge $\{u_n\}$ eine konvergente Folge $\{v_n\}$ und eine Zahl α existieren derart, daß

$$v_n + \frac{(-1)^n}{\vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_n} \cdot \alpha = A_n(u_0, u_1, \dots)$$

ist; aus dem ersten Teil folgt wieder, daß es eine Folge $\{u_n'\}$ gibt, für die die entsprechende Zahl α' von Null verschieden ist. Wir setzen noch sinngemäß

$$v_n' = A_n(u_0', u_1', \dots) - \frac{(-1)^n}{\vartheta_0 \vartheta_1 \dots \vartheta_n} \cdot \alpha'.$$

Wenn nun $\{u_n\}$ eine beliebige B-limitierbare Folge ist, und $\{v_n\}$ und α die oben erklärte Folge bzw. Zahl bedeutet, so setzen wir $u_n'' = u_n - \frac{\alpha}{\alpha'} u_n'$. $\{u_n'\}$ ist C-limitierbar; weiter ist $A_n(u_0'', u_1'', \ldots) = v_n - \frac{\alpha}{\alpha'} v_n'$. Da $\{v_n\}$ und $\{v_n'\}$ konvergieren, ist die Folge $\{u_n''\}$ A — daher auch C-limitierbar. $\{u_n\}$ ist also auch C-limitierbar. Da $\{u_n\}$ sonst ganz beliebig war, so haben wir den Satz:

Satz VII. *Zu jedem normalen Limitierungsverfahren A läßt sich ein ebensolches Verfahren B konstruieren, das die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *das Konvergenzfeld des B-Verfahrens umfaßt das des A-Verfahrens als echte Teilmenge, und*

2. *es existiert kein drittes, etwa C-Verfahren derart, daß sein Konvergenzfeld das des A-Verfahrens als echte Teilmenge enthält und zugleich in dem des B-Verfahrens als ebenfalls echte Teilmenge enthalten ist.*

Der obige Satz bildet die Lösung eines mir von Herrn H. Steinhaus mitgeteilten Problems.

(Eingegangen am 16. Juli 1927.)

A convergence criterion for Fourier series.

Von

G. H. Hardy in Oxford und J. E. Littlewood in Cambridge.

1. Our first object in this note is to establish the criterion for the convergence of Fourier series, in the classical sense, which is embodied in Theorem 1 below, and which we stated without proof in our memoir **7**.

We suppose throughout that $f(\theta)$ is periodic and integrable, that $0 < \alpha \leqq 1$, and that $p \geqq 1$. We denote by

$$\Delta = \Delta f = \Delta_h f \tag{1.1}$$

one of the three differences

$$f(\theta) - f(\theta - h), \quad f(\theta + h) - f(\theta), \quad f(\theta + h) - f(\theta - h),$$

where $h > 0$. We say that $f(\theta)$ belongs to the Lipschitz class $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ if

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f|^p \, d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = O(h^\alpha) \tag{1.2}$$

when $h \to 0$, and to the class $\mathrm{Lip}^*(\alpha, p)$ if (1.2) still holds when O is replaced by o. It is indifferent which form of Δ we select[1]). A function of $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ necessarily belongs to the Lebesgue class L^p.[2])

If $\Delta f = O(h^\alpha)$, or $o(h^\alpha)$, we say that $f(\theta)$ belongs to $\mathrm{Lip}\,\alpha$, or $\mathrm{Lip}^*\,\alpha$. A function of $\mathrm{Lip}\,\alpha$ belongs to $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ for every positive p, and the properties of such functions may be regarded as limiting cases (for $p = \infty$) of those of functions of $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$.

In particular we call the class $\mathrm{Lip}\left(\frac{1}{p}, p\right)$, *i. e.* the class of functions satisfying

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f|^p \, d\theta = O(h), \tag{1.3}$$

the class Λ_p. Our main theorem is then as follows.

[1]) Hardy and Littlewood, **7**, 597.

[2]) Hardy and Littlewood, **7**, 566.

Theorem 1. *The Fourier series of a function of Λ_p is convergent, and indeed summable $\left(C, -\frac{1}{p}+\delta\right)$ for any positive δ, whenever it is summable by any Cesàro mean. The necessary and sufficient condition for summability to sum s, for a particular value of θ, is*

$$\int_0^t \varphi(u)\,du = o(t), \tag{1.4}$$

where

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\{f(\theta+t)+f(\theta-t)-2s\}. \tag{1.5}$$

The theorem does not include any of the recognised criteria except Jordan's[3]), nor is it included by any. Its origin is however to be found in the well known criterion of Lebesgue[4]). The conditions of Lebesgue are

$$\int_0^t |\varphi(u)|\,du = o(t) \tag{1.6}$$

and

$$\int_t^\pi \frac{|\varphi(u+t)-\varphi(u)|}{u}\,du = o(1). \tag{1.7}$$

If now $f(\theta)$ belongs to $\mathrm{Lip}^*\left(\frac{1}{p}, p\right)$, so that (1.3) holds with o for O, then $\varphi(t)$ belongs to the same class, and

$$\int_t^\pi \frac{|\Delta_t \varphi|}{u}\,du \leqq \left(\int_0^\pi |\Delta_t \varphi|^p\,du\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_t^\pi \frac{du}{u^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} = o\left(t^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}-1}\right) = o(1),\ ^5)$$

so that Lebesgue's second criterion is satisfied uniformly; and it was this that suggested the investigations leading to Theorem 1[6]).

---

[3]) See Lemma 9 below.

[4]) See Lebesgue, **10**; de la Vallée-Poussin, **15**; Hobson, 8.

[5]) We write $p' = \frac{p}{p-1}$ when $p>1$, and similarly for other letters. Our argument supposes $p>1$. If $p=1$ we have

$$\int_t^\pi \frac{|\Delta_t \varphi|}{u}\,du \leqq \frac{1}{t}\int_0^\pi |\Delta_t \varphi|\,du = o(1).$$

[6]) Pollard (**14**) has generalised Lebesgue's criterion in two directions. He starts not with (1.7) but with Lebesgue's alternative condition

$$\int_t^\pi \left|\frac{\varphi(u+t)}{u+t} - \frac{\varphi(u)}{u}\right| du = o(1), \tag{1.7a}$$

(Fortsetzung der Fußnote [6]) auf nächster Seite.

Our main purpose then is to define a class of functions for which the convergence problem admits a complete solution; but we also prove some other theorems which are suggested by Theorem 1 or help to elucidate its relations to theorems proved by other writers. We prove in Theorem 7, for example, generalising a theorem of Zygmund[7]), that the Fourier series of a function of $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$, where $\alpha p > 1$, is uniformly summable $(C, -\alpha+\delta)$, and in Theorem 8 (after Titchmarsh) that it is absolutely convergent when also $p \leqq 2$. In Theorem 5 we show that a function of $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ belongs also to

$$\mathrm{Lip}\left(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q},\ q\right)$$

for a certain range of values of q, and in particular that, when $\alpha p > 1$, it is equivalent to a function of $\mathrm{Lip}\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)$.

---

a condition equivalent to (1. 7) when (1. 6) is satisfied. He shows that (1. 7a) may be replaced by

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \int_{kt}^{\pi} \left| \frac{\varphi(u+t)}{u+t} - \frac{\varphi(u)}{u} \right| du < \eta(k), \tag{1.7a'}$$

where $\eta(k) \to 0$ when $k \to \infty$, and (1. 6) by (1. 4).

The situation is different if we state Lebesgue's criterion as we have stated it in the text. In this case (1. 7) may be replaced by

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \int_{kt}^{\pi} \frac{|\varphi(u+t) - \varphi(u)|}{u}\, du < \eta(k), \tag{1.7'}$$

but it does not seem to be possible to replace (1. 6) by (1. 4).

The condition (1. 7′) is a consequence of (1. 3), since

$$\int_{kt}^{\pi} \frac{|\Delta_t \varphi|}{u}\, du \leqq \left(\int_0^{\pi} |\Delta_t \varphi|^p du\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{kt}^{\pi} \frac{du}{u^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqq K t^{\frac{1}{p}} (kt)^{\frac{1}{p'}-1} = K k^{-\frac{1}{p}},$$

where K is independent of t, θ and k. Hence any function of Λ_p satisfies (1. 7′) uniformly in θ. In order to deduce Theorem 1 from this, it would be necessary to show that (1. 7′) involves the convergence of the series wherever it is summable, *i. e.* (by Lemma 6 below) wherever

$$\varphi_r = o(t^r) \tag{1.4'}$$

for some r, φ_r being the r-th integral of φ over $(0, t)$. That this should be true seems to us very improbable.

The conditions (1. 7) and (1. 7a) are no longer equivalent when (1. 6) is replaced by (1. 4), which is (1. 4′) with $r = 1$. It has never been shown even that (1. 7) and (1. 4) are sufficient conditions for convergence.

[7]) Zygmund, **25**. Zygmund's theorem is the special case in which $p = \infty$, so that $f(\theta)$ belongs to $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

We use freely the idea of summability by Cesàro means of negative order. Such means may not appear to be of great intrinsic interest, but our methods of proof compel us to use them[8]), and, if they are to be used at all, results involving them should be stated with the greatest precision attainable.

Generalities concerning Fourier series and analytic functions.

2. The complex Fourier series of an arbitrary function $f(\theta)$ of the class L is defined by

$$(2.1) \qquad f(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_m e^{mi\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_m, \qquad c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-mi\theta}\, d\theta.$$

If we write

$$(2.2) \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - i\, b_n)$$

for all n, then a_n and b_n are respectively even and odd functions of n, and the formal relations between $f(\theta)$, a_n, and b_n are the classical formulae

$$(2.3) \qquad f(\theta) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{1}^{\infty} A_n,$$

$$(2.4) \qquad \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n\theta\, d\theta.$$

In these $f(\theta)$ is usually supposed to be real, though this is naturally unnecessary.

In what follows we use the 'complex' or 'real' system of formulae as may be most convenient, and call the series the complex and real Fourier series of $f(\theta)$, the use of the word 'real' not implying that $f(\theta)$ is real. We shall generally use the suffix m when we are concerned with the complex formulae, and n when we use the formulae of the classical type.

If $c_m = 0$ for all negative or for all positive m, then we call (2.1) a Fourier series *of power series type*[9]) or a *Fourier power series*. If

$$f(\theta) \sim \sum_{0}^{\infty} c_m e^{mi\theta}$$

---

[8]) We make repeated use of Lemma 2 (the 'convexity theorem' for Cesàro means). It is obvious that, if we are to use this lemma to prove the convergence of a series in the classical sense, the range of values of r considered must strictly include $r = 0$ and therefore negative values.

[9]) This phrase was introduced by F. Riesz, **18**.

is a Fourier power series, then the analytic function $\Sigma c_m g^m$ has $f(\theta)$ for its 'boundary function' [10]).

The series

$$\sum (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) \tag{2.5}$$

is called the series conjugate or allied to (2.3). It is not necessarily a Fourier series. It was however proved by M. Riesz [11]) that, if $f(\theta)$ belongs to L^p, where $p > 1$, then (2.5) is also a Fourier series, and that of a function $-g(\theta)$ also belonging to L^p. The function $g(\theta)$ is defined, for almost all θ, by

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cot \frac{1}{2}(\varphi - \theta)\, d\varphi, \tag{2.6}$$

where the integral is a 'principal value' in Cauchy's sense. In these circumstances $h(\theta) = f(\theta) - i\, g(\theta)$ is the boundary function of an analytic function $H(z)$; and this function belongs to the complex class L^p, *i. e.*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(r e^{i\theta})|^p\, d\theta \tag{2.7}$$

is bounded for $r < 1$.

Riesz's theorem may be stated in various forms. The form which is most important here is that [12]) *if the series* (2.1) *is the Fourier series of a function of* L^p, *then the series*

$$\sum_0^{\infty} c_m e^{mi\theta}, \quad \sum_{-\infty}^{-1} c_m e^{mi\theta} \tag{2.8}$$

are the Fourier (power) series of functions of L^p. We call the series (2.8) the (positive and negative) *power series components* of (2.1).

Preliminary lemmas.

3.1. In this section we collect a number of propositions, for the most part known, which will be required in the proofs of our principal theorems. In one or two cases, where the results have an independent interest, we have developed them a little further than is really necessary.

Lemmas concerning Cesàro summability.

3.2. In these lemmas $\sum u_n$ or U is a series

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

[10]) For all this see F. and M. Riesz, **19**.

[11]) M. Riesz, **20**.

[12]) See Hardy and Littlewood, **5**, and M. Riesz, **21**, for fuller explanations.

and $\sum v_m$ or V a series

$$\ldots + v_{-2} + v_{-1} + v_0 + v_1 + v_2 + \ldots .$$

We write

$$s_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+r}{r} u_\nu, \qquad \sigma_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+r}{r} \nu\, u_\nu,$$

$$t_m^{(r)} = \sum_{\mu=-m}^{m} \binom{m-|\mu|+r}{r} v_\mu, \qquad \tau_m^{(r)} = \sum_{\mu=-m}^{m} \binom{m-|\mu|+r}{r} |\mu|\, v_\mu,$$

where $r > -1$. The series are *summable* (C, r), to sums U or V, if

$$s_n^{(r)} \sim U\binom{n+r}{r} \sim U\frac{n^r}{\Gamma(r+1)}$$

or

$$t_m^{(r)} \sim V\binom{m+r}{r} \sim V\frac{m^r}{\Gamma(r+1)};$$

and *bounded* (C, r) if $s_n^{(r)} = O(n^r)$ or $t_m^{(r)} = O(m^r)$.

Lemma 1. *If U is bounded $(C, r+1)$, then the necessary and sufficient condition that it should be bounded (C, r) is that*

$$\sigma_n^{(r)} = O(n^{r+1}). \tag{3.21}$$

The corresponding condition for V is

$$\tau_m^{(r)} = O(m^{r+1}). \tag{3.22}$$

In either case we may replace 'bounded' every where by 'summable' if we replace O by o.

These results are immediate corollaries of the identities

$$\sigma_n^{(r)} = (n+r+1)\, s_n^{(r)} - (r+1)\, s_n^{(r+1)},$$

$$\tau_m^{(r)} = (m+r+1)\, t_m^{(r)} - (r+1)\, t_m^{(r+1)}.$$

Lemma 2[13]). *If U (or V) is summable (C), i. e. summable (C, r) for some r, and bounded (C, r) for $r > \gamma \geqq -1$, then it is summable (C, r) for $r > \gamma$.*

Lemma 3. *If U or V is summable (C), and (3.21) or (3.22) holds for $r > \gamma \geqq -1$, then the series is summable (C, r) for $r > \gamma$.*

This follows at once from Lemmas 1 and 2.

Lemma 4. *If U is summable (C), and*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\nu\, u_\nu|^p = O(n),$$

where $p \geqq 1$, then U is summable $\left(C, -1 + \frac{1}{p} + \delta\right)$ for every positive δ.

[13]) For U see Andersen, **1**: the proof applies to V with trivial alterations.

We have shown already[14]) that the series is convergent. There is an obvious analogue for V which we leave to the reader.

After Lemma 3, we have only to verify that $\sigma_n^{(r)} = O(n^{r+1})$ for $r > -1 + \frac{1}{p}$. But then

$$\sigma_n^{(r)} = O\left(\sum_{\nu=1}^{n} (n-\nu+1)^r |\nu u_\nu|\right) = O\left(\sum_{\nu=1}^{n} |\nu u_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} (n-\nu+1)^{p'r}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= O\left(n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+r}\right) = O(n^{r+1}),$$

since $p'r > -1$.

Lemmas concerning Fourier series in general.

3.3. Lemma 5. *If c_m, a_n, b_n are the Fourier constants of $f(\theta)$, defined as in § 2, and $u_0 = \frac{1}{2}A_0$, $u_n = A_n$ $(n > 0)$, $v_m = C_m$, then $s_n^{(r)} = t_n^{(r)}$ for all n and r, so that the convergence and summability properties of the real and complex Fourier series are identical.*

This results immediately from the definitions. It follows that, in the succeeding lemmas, we need not distinguish the two forms.

Lemma 6. *The necessary and sufficient condition for the summability (C) of the series is that*

$$\varphi_r = o(t^r) \tag{3.31}$$

for some r, φ_r being the r-th integral of φ over $(0, t)$.

We may express the condition by saying that

$$\varphi \to 0 \quad (C, r)$$

for some r. The lemma is the principal theorem of our memoir **3**. It is most natural to quote the theorem in its general form, but it may be worth while (since the proof is not entirely easy) to observe that special cases, such as Lebesgue's theorem[15]) that $\varphi_1 = o(t)$ implies summability $(C, 2)$, would suffice for our applications.

Lemma 7.[16]) *If the series is summable by a mean of negative order, then $\varphi_1 = o(t)$.*

Lemma 8. *If $-1 < \gamma < 1$, and $s_n^{(\gamma)}$ is the γ-th Cesàro mean of the Fourier series, then*

$$s_n^{(\gamma)} - s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t)\, \Omega(t)\, dt,$$

[14]) Hardy and Littlewood, **4**.

[15]) Lebesgue, **10**.

[16]) Hardy and Littlewood, **6**.

where

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2, \qquad |\Omega| \leqq Kn, \qquad |\Omega_2| \leqq \frac{K}{nt^2},$$

$$\Omega_1 = \frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\right)t - \frac{1}{2}\gamma\pi\right)}{2^\gamma\left(\sin\frac{1}{2}t\right)^{\gamma+1}},$$

and the K's are independent of n, t, and θ.

See Zygmund, **25**; the results are due to Kogbetliantz, **9**. The simplest and most natural proof is by complex integration, but Szegö (**23**) has given a very elegant proof by elementary methods.

Lemmas concerning the classes Lip (α, p).

3. 4. Lemma 9. *Any function of bounded variation belongs to* Lip (1, 1), *and any function of* Lip (1, 1) *is equivalent to a function of bounded variation.*

If $f(\theta)$ is of bounded variation, then

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f|\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left| \int_{\theta}^{\theta+h} df(t) \right| \leqq \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{\theta}^{\theta+h} |df(t)| \leqq \int_{-\pi}^{\pi+h} |df(t)| \int_{t-h}^{t} d\theta = O(h).$$

For the converse, see Theorem 24 of our memoir **7**.

Lemma 10[17]). *If $f(\theta)$ is the α-th integral of a function of L^p, then $f(\theta)$ belongs to* Lip*(α, p).

Lemma 11. *If $f(\theta)$ belongs to* Lip (α, p), *then $c_m = O(|m|^{-\alpha})$, and if to* Lip*(α, p), *then $c_m = o(|m|^{-\alpha})$.*

For, supposing for example $m > 0$, we have

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-mi\theta}\, d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta+\frac{\pi}{m}\right) e^{-mi\theta}\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(\theta+\frac{\pi}{m}\right) - f(\theta)\right) e^{-mi\theta}\, d\theta$$

$$= O\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(\theta+\frac{\pi}{m}\right) - f(\theta)\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = O(m^{-\alpha}),$$

or $o(|m|^{-\alpha})$, according to the hypothesis.

---

[17]) Hardy and Littlewood, 7.

Lemma 12. *If* $p \geqq 2$ *and*

$$\gamma_n = \sum_{-n}^{n} |mc_m|^{p'} = O(n),$$

and in particular if $p \geqq 2$ *and* $c_m = O(|m|^{-1})$, *then* $f(\theta)$ *belongs to* Λ_p.

We have

$$\Delta f = f(\theta+h) - f(\theta-h) \sim 2i \sum c_m \sin mh\, e^{mi\theta}.$$

Hence, by Hausdorff's theorem,

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leqq 2\left(\sum (|c_m| |\sin mh|)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= O\left(h^{p'} \sum_{|m| \leqq \frac{1}{h}} |mc_m|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} + O\left(\sum_{|m| > \frac{1}{h}} |c_m|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.41}$$

But

$$\sum_{|m|>\frac{1}{h}} |c_m|^{p'} = \sum_{n>\frac{1}{h}} n^{-p'}(\gamma_n - \gamma_{n-1}) \leqq \sum_{n>\frac{1}{h}} \gamma_n (n^{-p'} - (n+1)^{-p'})$$

$$= O\left(\sum_{n>\frac{1}{h}} n^{-p'}\right) = O(h^{p'-1}).$$

Hence (3.41) gives

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(h^{\frac{p'-1}{p'}}\right) = O\left(h^{\frac{1}{p}}\right).$$

The result ceases to be true when $p < 2$. Suppose, for example, that the series is a (positive) Fourier power series, that $c_m = O(m^{-1})$, and that $F(z)$ is the corresponding analytic function, so that the coefficients in $F'(z) = g(z)$ are bounded. If the result of the lemma is true it follows, if we anticipate for a moment the result of Theorem 3, that

$$\int |g(re^{i\theta})|^p d\theta = O\left(\frac{1}{(1-r)^{p-1}}\right)$$

for all $g(z)$ with bounded coefficients. This is true when $p \geqq 2$, since

$$g = O\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad \int |g|^2 d\theta = O\left(\sum |c_m|^2 r^{2m}\right) = O\left(\frac{1}{1-r}\right),$$

$$\int |g|^p d\theta = O\left(\mathrm{Max}\,|g|^{p-2} \int |g|^2 d\theta\right) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{p-1}}\right).$$

That it is false when $p < 2$ may be shown by the example

$$g(z) = \sum e^{ai \log n} z^n \qquad (a > 0).$$

Here $g(z)$ is (to put it roughly) of order $\frac{1}{2}$ for all θ, and the integral is of order $\frac{1}{2}p > p - 1$.

Incidentally we see that a function of Δ_p is not necessarily bounded. This is easily proved directly. For example, if $f(\theta) = \log \frac{1}{|\theta|}$, we have

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f|^p \, d\theta = O\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \log \left| \frac{\theta + h}{\theta - h} \right| \right|^p d\theta \right) = O\left(h \int_{-\infty}^{\infty} \left| \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right|^p dx \right) = O(h)$$

for all $p > 1$.

3.5. Lemma 13. *If* $p > 1$, $0 < \alpha \leqq 1$ *or* $p = 1$, $0 < \alpha < 1$, *and* $f(\theta)$ *belongs to* Lip (α, p), *then the conjugate function* $-g(\theta)$ *also belongs to* Lip(α, p).

This is an immediate corollary of Riesz's theorem when $p > 1$, since Δf and $-\Delta g$ are conjugate, and

$$\int |\Delta g|^p \, d\theta \leqq K(p) \int |\Delta f|^p \, d\theta,$$

where $K(p)$ depends only on p. This proof fails when $p = 1$. We therefore give an alternative proof valid when $p \geqq 1$, $\alpha < 1$[18]). When $p = 1$, $\alpha = 1$, the result is false, since the conjugate of a function of bounded variation is not necessarily of bounded variation.

After (2.6), we have

$$g(\theta + h) - g(\theta - h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi + \theta) \left(\cot \tfrac{1}{2}(\varphi - h) - \cot \tfrac{1}{2}(\varphi + h) \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\varphi + \theta) - f(\theta)) \left(\cot \tfrac{1}{2}(\varphi - h) - \cot \tfrac{1}{2}(\varphi + h) \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-2h} + \frac{1}{2\pi} \int_{2h}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-2h}^{2h} (f(\varphi + \theta) - f(\theta)) \cot \tfrac{1}{2}(\varphi - h) \, d\varphi$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-2h}^{2h} (f(\varphi + \theta) - f(\theta)) \cot \tfrac{1}{2}(\varphi + h) \, d\varphi = J_1 + J_2 + J_3 + J_4,$$

---

[18]) Modelled on Priwaloff's for the case $p = \infty$: see Priwaloff, **17**. It should be observed that the theorem also fails for $p = \infty$, $\alpha = 1$.

say; and it is sufficient to show that

$$(\int |J_i|^p\, d\theta)^{\frac{1}{p}} = O(h^\alpha) \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{3.51}$$

In J_1 and J_2 we have

$$\cot\tfrac{1}{2}(\varphi - h) - \cot\tfrac{1}{2}(\varphi + h) = O\left(\frac{h}{\varphi^2 - h^2}\right)$$

and so

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |J_2|^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\int_{2h}^{\pi} \frac{h\, d\varphi}{\varphi^2 - h^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\varphi + \theta) - f(\theta)|^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= O\left(h\int_{2h}^{\infty} \frac{\varphi^\alpha\, d\varphi}{\varphi^2 - h^2}\right) = O(h^\alpha)$$

(since $\alpha < 1$), and similarly for J_1.

Of J_3 and J_4 we need only consider the first. We write

$$J_3 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2h}^{2h} (f(\varphi + \theta) - f(h + \theta)) \cot\tfrac{1}{2}(\varphi - h)\, d\varphi$$

$$+ \frac{1}{2\pi}(f(h + \theta) - f(\theta)) \int_{-2h}^{2h} \cot\tfrac{1}{2}(\varphi - h)\, d\varphi = J_3' + J_3'',$$

say. Then

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |J_3'|^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\left(\int_{-2h}^{2h} |f(\varphi + \theta) - f(h + \theta)|\left|\cot\tfrac{1}{2}(\varphi - h)\right| d\varphi\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-2h}^{2h} \left|\cot\tfrac{1}{2}(\varphi - h)\right| d\varphi \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\varphi + \theta) - f(h + \theta)|^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= O\left(\int_{-2h}^{2h} |\varphi - h|^{\alpha - 1}\, d\varphi\right) = O(h^\alpha).$$

Also

$$\int_{-2h}^{2h} \cot\tfrac{1}{2}(\varphi - h)\, d\varphi = 2\log\left|\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\sin\frac{3}{2}h}\right| = O(1),$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |J_3''|^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta + h) - f(\theta)|^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = O(h^\alpha).$$

Hence (3.51) holds for $i = 3$.

Lemma 14. *If p and α satisfy the conditions of Lemma* 13, *and $f(\theta)$ belongs to* Lip (α, p), *then the power series components of $f(\theta)$ are the Fourier power series of functions of* Lip (α, p).

This is merely a restatement of Lemma 13 in different language.

Preliminary theorems concerning analytic functions.

4. 1. Suppose that

$$F(z) = F(r e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

is regular for $r < 1$. We write

$$M_p = M_p(r) = M_p(r, F) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(z)|^p \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

(for any $p > 0$). It is known that M_p is an increasing function of r for every p and an increasing function of p for every r, and that $M_p(r) \to M(r)$, the maximum modulus of $F(z)$, when $p \to \infty$.[19]) If $p > 1$, then the necessary and sufficient condition that $F(z)$ should have a boundary value $F(e^{i\theta}) = f(\theta)$ belonging to L^p is that $M_p(r)$ should be bounded[20]).

Theorem 2. *If $p \geqq 1$, $\beta \geqq 0$, and*

$$M_p(r, F) = O((1-r)^{-\beta}), \tag{4. 11}$$

then

$$M_q(r, F) = O\left((1-r)^{-\beta-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\right) \tag{4. 12}$$

for $q > p$. In particular, for $q = \infty$,

$$M(r) = O\left((1-r)^{-\beta-\frac{1}{p}}\right). \tag{4. 13}$$

If $\beta = 0$, the O's in (4. 12) *and* (4. 13) *may be replaced by o's.*

The results are still true when $0 < p < 1$, but it would carry us too far to prove them here. We need only prove (4. 13), as it stands or in the sharpened form; for if (4. 13) is proved, we have

$$M_q \leqq M_p^{\frac{p}{q}} M^{\frac{q-p}{q}} = O((1-r)^{-\lambda}),$$

where

$$\lambda = \frac{p}{q}\beta + \frac{q-p}{q}\left(\beta + \frac{1}{p}\right) = \beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

If $p > 1$ and $\varrho = \frac{1}{2}(1+r)$, we have

---

[19]) See Littlewood, **12** and **13**, for these and other properties of M_p.

[20]) F. and M. Riesz, **19**.

$$|F(re^{i\theta})| = \left|\frac{\varrho}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F(\varrho e^{i\varphi})e^{i\varphi}\,d\varphi}{\varrho e^{i\varphi}-re^{i\theta}}\right|$$

$$\leqq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(\varrho e^{i\varphi})|^p\,d\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{|\varrho e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= O\left((1-\varrho)^{-\beta}\left(\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{((\varrho-r)^2+\psi^2)^{\frac{1}{2}p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}\right)$$

$$= O\left((1-r)^{-\beta}(\varrho-r)\right)^{-\frac{1}{p}} = O\left((1-r)^{-\beta-\frac{1}{p}}\right).$$

If $p=1$, we have

$$|F(re^{i\theta})| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(\varrho e^{i\varphi})|\,d\varphi\cdot\operatorname*{Max}_{(\varphi)}\frac{1}{|\varrho e^{i\varphi}-re^{i\theta}|}$$

$$= O\left((1-\varrho)^{-\beta}(\varrho-r)^{-1}\right) = O\left((1-r)^{-\beta-1}\right).$$

If $\beta=0$, $F(e^{i\theta})=f(\theta)$ belongs to L^p, and we can choose δ so that

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(\theta+\varphi)|^p\,d\varphi < \varepsilon^p$$

for all θ. Also[21])

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\varphi)e^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\theta+\varphi)e^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{i\varphi}-r}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} = J_1+J_2+J_3,$$

say. If $p>1$,

$$|J_1| \leqq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(\theta+\varphi)|^p\,d\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{|e^{i\varphi}-r|^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} < K\varepsilon(1-r)^{-\frac{1}{p}},$$

where K is independent of r and δ; and J_2 and J_3 are bounded when δ is fixed. Hence

$$F(re^{i\theta}) = o\left((1-r)^{-\frac{1}{p}}\right).$$

The proof when $p=1$ may obviously be modified in the same manner.

It may be observed that when $p\leqq 2$ we can assert more, viz. that

$$F(r) = \sum|c_n|r^n = O\left((1-r)^{-\beta-\frac{1}{p}}\right),$$

---

[21]) F. and M. Riesz, 19.

or the corresponding equation with o. Thus if $p > 1$, $\beta > 0$, we have, by Hausdorff's theorem,

$$\Big(\sum |c_n|^{p'} r^{p'n}\Big)^{\frac{1}{p'}} \leqq \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} = O((1-r)^{-\beta}),$$

and so

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(r) &= \sum (|c_n| r^{\frac{1}{2}n} \cdot r^{\frac{1}{2}n}) \leqq \Big(\sum |c_n|^{p'} r^{\frac{1}{2}p'n}\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\sum r^{\frac{1}{2}pn}\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= O((1-r^{\frac{1}{2}})^{-\beta}(1-r^{\frac{1}{2}p})^{-\frac{1}{p}}) = O((1-r)^{-\beta-\frac{1}{p}}). \end{aligned}$$

When $\beta = 0$, we must use the boundary function $f(\theta)$. Since $f(\theta)$ belongs to L^p, $\sum |c_n|^{p'}$ is convergent, and we can choose N so that

$$\Big(\sum_{N+1}^{\infty} |c_n|^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} < \varepsilon.$$

Hence $\boldsymbol{F}(r)$ is the sum of two parts, of which one is a polynomial in r of degree N, while the other is

$$\sum_{N+1}^{\infty} |c_n| r^n \leqq \Big(\sum_{N+1}^{\infty} |c_n|^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\sum_{N+1}^{\infty} r^{pn}\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon (1-r)^{-\frac{1}{p}}.$$

Hence $\boldsymbol{F}(r) = o((1-r)^{-\frac{1}{p}})$. The case $p = 1$ is trivial.

These results are false for $p > 2$, a *Gegenbeispiel* being given by the function

$$F(z) = \sum n^{-\frac{1}{2}-\delta} e^{ai n \log n} z^n \qquad (a > 0, \delta > 0)$$

continuous for $|z| \leqq 1$.

4.2. Theorem 3. *Suppose that* $p \geqq 1$, $0 < \alpha \leqq 1$, *that*

$$\sum_0^{\infty} c_n e^{ni\theta}$$

is the Fourier power series of a function $F(e^{i\theta}) = f(\theta)$, *and that* $F(z)$ *is the corresponding analytic function. Then the necessary and sufficient condition that* $f(\theta)$ *should belong to* Lip (α, p) *is that*

$$M_p(r, F') = O((1-r)^{-1+\alpha}). \tag{4.21}$$

We suppose first that $p > 1$. The case $\alpha = 1$ may be disposed of at once, since hypothesis and condition are each necessary and sufficient for $f(\theta)$ to be equivalent to the integral of a function of L^p [22]. We may therefore suppose that $0 < \alpha < 1$.

[22] See Hardy and Littlewood, 7, (Theorems 22 and 24).

Suppose first that $f(\theta)$ belongs to $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$. Then

$$F'(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\varphi)\, e^{i\varphi}\, d\varphi}{(e^{i\varphi} - re^{i\theta})^2} = \frac{e^{-i\theta}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta+\varphi)\, e^{i\varphi}\, d\varphi}{(e^{i\varphi}-r)^2}$$

$$= \frac{e^{-i\theta}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi}-r)^2}(f(\theta+\varphi) - f(\theta))\, d\varphi.$$

Hence

$$\Big(\int_{-\pi}^{\pi} |F'|^p\, d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{|e^{i\varphi}-r|^2}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta+\varphi) - f(\theta)|^p\, d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$= O\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\varphi|^\alpha\, d\varphi}{|e^{i\varphi}-r|^2}\Big) = O\Big(\int_0^\infty \frac{\varphi^\alpha\, d\varphi}{(1-r)^2+\varphi^2}\Big) = O\Big(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\Big),$$

which is (4.21).

Next, suppose that (4.21) is satisfied. In order to prove that $f(\theta)$ belongs to $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$, it is sufficient to prove that

$$(4.22)\quad r\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta+ih}) - F(re^{i\theta})|^p\, d\theta = r\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta|^p\, d\theta < Kh^{p\alpha},$$

for $0 < h \leqq \frac{1}{2}$, $r \geqq \frac{1}{2}$, K being independent of h and r. Now

$$(4.23)\qquad |\Delta| \leqq \Big(\int_1 + \int_2 + \int_3\Big)|F'(z)|\, |dz| = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

where the path 2 is the arc $(\theta, \theta+h)$ of the circle $|z| = r-h = \varrho$, and 1 and 3 are the lines joining the ends of the arc to the corresponding ends on the circle $|z| = r$.

Now, in the first place,

$$(4.24)\quad \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_2^p\, d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq \Big(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \Big(\int_0^h |F'(\varrho e^{i\theta+i\varphi})|\, d\varphi\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \int_0^h d\varphi \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |F'|^p\, d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} = O(h(1-\varrho)^{\alpha-1}) = O(h^\alpha),$$

uniformly in r. Secondly,

$$\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_1^p\, d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \Big(\int_\varrho^{\varrho+h} |F'(te^{i\theta})|\, dt\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \int_\varrho^{\varrho+h} dt \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |F'(te^{i\theta})|^p\, d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} = O\Big(\int_\varrho^{\varrho+h} (1-t)^{\alpha-1}\, dt\Big),$$

uniformly in h and ϱ (or r). If $1-r>h$ or $1-\varrho>2h$, this is

$$O(h(1-\varrho-h)^{\alpha-1})=O(h^{\alpha}),$$

while if $1-r\leqq h$ or $1-\varrho\leqq 2h$ it is

$$O\Big(\int_{\varrho}^{1}(1-t)^{\alpha-1}dt\Big)=O((1-\varrho)^{\alpha})=O(h^{\alpha}).$$

Hence

$$\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_1^{p}\,d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}=O(h^{\alpha}), \tag{4.25}$$

and the same argument applies to Δ_2. The conclusion follows from (4.23), (4.24), and (4.25).

We have now to consider the case $p=1$. The arguments which precede remain valid when $p=1$, $\alpha<1$, so that we may suppose $p=1$, $\alpha=1$. By Lemma 9, $f(\theta)$ belongs to $\mathrm{Lip}\,(1,1)$ if, and only if, it is of bounded variation. But it is known[23]) that $f(\theta)$ is of bounded variation if, and only if, $M_1(r,F')$ is bounded. This completes the proof of the theorem.

It is to be observed that Theorem 3 remains true in the limiting case $p=\infty$. We have in fact

Theorem 4. *The necessary and sufficient condition that $f(\theta)$ should be equivalent to a function of* $\mathrm{Lip}\,\alpha$, *where* $0<\alpha<1$, *is that*

$$F'(re^{i\theta})=O((1-r)^{-1+\alpha}).$$

The proof is a trivial simplification of that of Theorem 3.

A theorem concerning the Lipschitz classes.

5. Theorem 5. *Suppose that $f(\theta)$ belongs to* $\mathrm{Lip}\,(\alpha,p)$, *where* $p\geqq 1$, $0<\alpha\leqq 1$. *Then*

(i) *if* $\alpha p\leqq 1$ *and* $p<q<\frac{p}{1-\alpha p}$, $f(\theta)$ *belongs to* $\mathrm{Lip}\left(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q},q\right)$;

(ii) *if* $\alpha p>1$, *then this is true for all* $q>p$, *and $f(\theta)$ is equivalent to a function of* $\mathrm{Lip}\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)$.

We exclude for the moment the case $p=1$, $\alpha=1$. If then $f(\theta)$ belongs to $\mathrm{Lip}\,(\alpha,p)$, so, by Lemma 14, do its power series components. There is therefore no loss of generality in supposing $f(\theta)=F(e^{i\theta})$ to be the boundary function of an analytic function $F(z)$.

By Theorem 3,

$$M_p(r,F')=O((1-r)^{-1+\alpha}),$$

[23]) F. and M. Riesz, 19.

and therefore, by Theorem 2,

$$M_q(r, F') = O\left((1-r)^{-1+\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\right)$$

for $q > p$. Now $\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0$ for $q < \frac{p}{1-\alpha p}$ if $\alpha p \leqq 1$, and for all positive q if $\alpha p > 1$. In either case our conclusion follows from Theorem 3.

We have also

$$F' = O\left((1-r)^{-1+\alpha-\frac{1}{p}}\right),$$

by Theorem 2. It follows from Theorem 4 that, when $\alpha p > 1$, $f(\theta)$ is equivalent to a function of Lip $\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)$.

In the excluded case $p = 1$, $\alpha = 1$ of (i), $f(\theta)$ is equivalent to a function of bounded variation (*a fortiori* a bounded function), and

$$\int |\Delta f|^q d\theta = O\left(\int |\Delta f| d\theta\right) = O(h),$$

so that the conclusion still holds.

The case $\alpha p = 1$ is relevant to Theorem 1, and we state it separately.

Theorem 6. *If $f(\theta)$ belongs to Λ_p, for a $p \geqq 1$, then it belongs to Λ_q for $q > p$.*

In concluding this section we should remark that the first results of this character were found by Titchmarsh[24]), and that ours were suggested by his. In his work the orders of the Lipschitz conditions are affected with an ε, and his method of proof introduces an unnecessary limitation[25]).

Proof of Theorem 1.

6. If $p = 1$, $f(\theta)$ is equivalent to a function of bounded variation. The series converges, and (1.4) is satisfied, for all θ. Also a_n and b_n are $O\left(\frac{1}{n}\right)$, so that the series satisfies the condition of Lemma 4, and is summable $(C, -1+\delta)$, for all θ and all positive δ. In this case then there is nothing to prove, and we may suppose $p > 1$.

Assuming therefore that $p > 1$, we write the series in the complex form, and denote its positive and negative power series components by $f_1(\theta) = F_1(e^{i\theta})$ and $f_2(\theta) = F_2(e^{i\theta})$. By Lemma 14, each of these belongs to Λ_p. We shall prove that

$$\sum_0^\infty C_n = \sum_0^\infty c_n e^{ni\theta},$$

---

[24]) Titchmarsh, 24.

[25]) Arising from the unsymmetrical role of the number 2 in the Hausdorff theorems.

the Fourier power series of $f_1(\theta)$, satisfies (3.21) for $r > -\frac{1}{p}$ and all θ. An analogous argument will apply to the second component, and it will then follow that $\sum C_m$ satisfies (3.22), and is therefore summable $\left(C, -\frac{1}{p}+\delta\right)$ whenever it is summable (C).

We write $z = \varrho e^{i\psi}$ and

$$G(z) = F_1(z e^{i\theta}) = \sum C_n z^n.$$

Then $g(\psi) = G(e^{i\psi})$ belongs to Λ_p, and so, by Theorem 3,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |G'(\varrho e^{i\psi})|^p \, d\psi = O((1-\varrho)^{1-p}). \tag{6.1}$$

Now $S_n^{(r)}$, the sum formed from C_n as $\sigma_n^{(r)}$ is formed from u_n, is the coefficient of z^n in $(1-z)^{-r-1} G'(z)$, so that

$$S_n^{(r)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{G'(z)\, dz}{(1-z)^{r+1} z^{n+1}},$$

the contour of integration being $|z| = \varrho = 1 - \frac{1}{n}$. Hence

$$S_n^{(r)} = O\left(\left(\int |G'|^p \, d\psi\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \frac{d\psi}{|1-z|^{(r+1)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}\right)$$

$$= O\left((1-\varrho)^{-1+\frac{1}{p}} (1-\varrho)^{\frac{1}{p'}-r-1}\right) = O(n^{r+1}),$$

provided that $(r+1)p' > 1$ or $r > -\frac{1}{p}$. This is (3.21).

Finally, (1.4) is sufficient for summability by Lemma 6, and necessary by Lemma 7. This completes the proof of the theorem.

It may be worth observing that when $p \leqq 2$, and the series is summable (C), much more is true than is expressed by (1.4). Thus when $1 < p \leqq 2$ it follows from (6.1), by Hausdorff's theorem, that

$$\sum |n C_n|^{p'} \varrho^{p' n} = O((1-\varrho)^{-1})$$

and so that

$$\sum_1^n |\nu C_\nu|^{p'} = O(n). \tag{6.2}$$

From (6.2), the convergence of $\sum C_n$, and Theorem 4 of our note **4**, it results that

$$\int_0^t |\varphi(u)|^q \, du = o(t)$$

for all positive q. In particular (1.6) is true. These results are obviously trivial when $p = 1$.

An extension of a theorem of Zygmund.

7.1. Theorem 7. *If $f(\theta)$ belongs to* Lip (α, p), *where* $0 < \alpha \leqq 1$, $\alpha p > 1$, *then the Fourier series is uniformly summable* $(C, -\alpha + \delta)$ *for every positive* δ. *If* $f(\theta)$ *belongs to* Lip* (α, p), *then the* δ *may be omitted.*

Since $\alpha p > 1$, $f(\theta)$ is equivalent to a continuous function[26]). We may therefore suppose $f(\theta)$ continuous, and take $s = f(\theta)$.

We take $\gamma = -\alpha + \delta$, $\gamma = -\alpha$ in the two cases, and write, in the notation of Lemma 8,

$$J = \int_0^\pi \varphi\, \Omega\, dt = \int_0^h \varphi\, \Omega\, dt + \int_h^\pi \varphi\, \Omega_1\, dt + \int_h^\pi \varphi\, \Omega_2\, dt = J_1 + J_2 + J_3,$$

where $h = \frac{\pi}{n}$. Then since $\varphi(t)$ tends to zero with t, uniformly in θ, we have

$$J_1 = O\Big(n \int_0^h |\varphi|\, dt\Big) = o(1), \qquad J_3 = O\Big(\frac{1}{n} \int_h^\pi \frac{|\varphi|}{t^2}\, dt\Big) = o(1),$$

each uniformly in θ.

We can express J_2 as the sum of four terms each of which is the product of a factor $O(n^{-\gamma})$ by an integral

$$L = \int_h^\pi \psi(t) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n t\, \frac{dt}{\Big(\sin \frac{1}{2} t\Big)^{\gamma+1}}, \tag{7.11}$$

where $\psi(t) = \varphi(t) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \Big(\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\Big) t$. It is plain that $\psi(t)$ belongs to Lip (α, p) [27]), uniformly in θ, and that everything is reduced to proving that

$$L = o(n^\gamma)$$

uniformly in θ.

We have

$$L = -\int_0^{\pi-h} \psi(t+h) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n t\, \frac{dt}{\Big(\sin \frac{1}{2}(t+h)\Big)^{\gamma+1}}, \tag{7.12}$$

---

[26]) Indeed to a function of Lip $\Big(\alpha - \frac{1}{p}\Big)$, by Theorem 5. This, combined with Zygmund's theorem, gives summability $\Big(C, -\alpha + \frac{1}{p} + \delta\Big)$, and in particular convergence, but not the full result.

[27]) The product of two bounded functions of Lip (α, p) belongs to Lip (α, p).

and here we may replace the limits by h and π with an error $o(h\cdot h^{-\gamma-1}) = o(n^\gamma)$. If we ignore errors of this form, and add (7.11) and (7.12), we obtain

$$L = -\frac{1}{2}\int_h^\pi \frac{\cos}{\sin} nt \left(\frac{\psi(t+h)}{\left(\sin\frac{1}{2}(t+h)\right)^{\gamma+1}} - \frac{\psi(t)}{\left(\sin\frac{1}{2}t\right)^{\gamma+1}} \right) dt$$

$$= O\left(\int_h^\pi \frac{|\psi(t+h)-\psi(t)|}{t^{\gamma+1}}\, dt \right)$$

$$+ O\left(\int_h^\pi |\psi(t)| \left| \frac{1}{\left(\sin\frac{1}{2}t\right)^{\gamma+1}} - \frac{1}{\left(\sin\frac{1}{2}(t+h)\right)^{\gamma+1}} \right| dt \right).$$

The second term here is

$$o\left(h\int_h^\pi \frac{dt}{t^{\gamma+2}} \right) = o(n^\gamma).$$

The first is

$$O\left(\left(\int_0^\pi |\psi(t+h)-\psi(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_h^\pi t^{-(\gamma+1)p'}\, dt \right)^{\frac{1}{p'}} \right).$$

In the first case this is

$$O(h^\alpha) = o(n^\gamma), \qquad O\left(h^\alpha \left(\log\frac{1}{h} \right)^{\frac{1}{p'}} \right) = o(n^\gamma),$$

or

$$O(h^\alpha \cdot h^{\frac{1}{p'}-1-\gamma}) = O(n^{\gamma+\frac{1}{p}-\alpha}) = o(n^\gamma),$$

according as $-\alpha < \gamma < -\frac{1}{p}$, $\gamma = -\frac{1}{p}$, or $\gamma > -\frac{1}{p}$. In the second case, when $f(\theta)$, and so $\psi(t)$, belongs to $\mathrm{Lip}^*(\alpha, p)$, and $\gamma = -\alpha$, we obtain $o(h^\alpha) = o(n^\gamma)$. This completes the proof. It should be observed that the series is not necessarily summable $(C, -\alpha)$ in the general case, Weierstrass's function $\sum a^{-n\alpha}\cos a^n\theta$ giving a *Gegenbeispiel*.

7.2. If $p \leqq 2$ (but not otherwise) there is a stronger theorem, viz.

Theorem 8. *If (in addition to the conditions of Theorem 7), $p \leqq 2$, then the series is absolutely convergent. In fact $\sum |c_m|^\varkappa$ is convergent for*

$$\varkappa > \frac{p}{p+p\alpha-1}$$

whenever $0 < \alpha \leqq 1$, $1 < p \leqq 2$.

This theorem, in its general form, is due to Titchmarsh[28]), and is a generalisation of a theorem of Szász[29]). The first result in this direction

[28]) Titchmarsh, **24** (the corresponding theorem for transforms).

[29]) Szász, **22**.

was the well known theorem of S. Bernstein[30]), that the Fourier series of a function of Lip α, where $\alpha > \frac{1}{2}$, is absolutely convergent. The general theorem may be proved very simply as follows[31]).

Since $p > 1$, we may suppose $f(\theta)$ the boundary function of an analytic $F(z) = \sum c_n e^{ni\theta}$. By Theorem 3

$$\int |F'(re^{i\theta})|^p \, d\theta = O\left(\frac{1}{(1-r)^{p-\alpha p}}\right).$$

Hence, by Hausdorff's theorem,

$$\sum |n c_n|^{p'} r^{p'n} = O\left(\frac{1}{(1-r)^{p'-\alpha p'}}\right),$$

and, taking $r = 1 - \frac{1}{n}$,

$$\sum_1^n |\nu c_\nu|^{p'} = O(n^{p'-\alpha p'}).$$

Now we may obviously suppose that $\varkappa < p'$, and then Hölder's inequality gives

$$\sum_1^n |\nu c_\nu|^{\varkappa} = O\left(n^{\varkappa-\alpha\varkappa} \cdot n^{\frac{p+\varkappa-p\varkappa}{p}}\right) = O\left(n^{1+\frac{\varkappa}{p}-\alpha\varkappa}\right).$$

But (7. 21) implies $\varkappa > 1 + \frac{\varkappa}{p} - \alpha\varkappa$, and so our conclusion follows by partial summation.

It should be observed that $\sum |c_m|^{\varkappa}$ is not necessarily convergent when

$$\varkappa = \frac{p}{p + \alpha p - 1}.$$

Suppose for example that $f(\theta) = |\theta|^{-a}$, where $(a+1)p > 1$. Then

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta+h) - f(\theta-h)|^p \, d\theta = O\left(\int_{-\infty}^{\infty} \big| |\theta+h|^{-a} - |\theta-h|^{-a} \big|^p \, d\theta\right)$$

$$= O\left(h^{1-ap} \int_{-\infty}^{\infty} \big| |w+1|^{-a} - |w-1|^{-a} \big|^p \, dw\right) = O(h^{1-ap}),$$

so that $f(\theta)$ belongs to Lip (α, p) with $\alpha = \frac{1}{p} - a$. But the Fourier constants of $f(\theta)$ behave like multiples of $|m|^{a-1}$, and

$$(a-1)\frac{p}{p+\alpha p-1} = -1,$$

so that $\sum |c_m|^{-\varkappa}$ is divergent.

The result of Theorem 8 is false when $p > 2$. In fact

$$(7.22) \qquad f(\theta) = \sum_1^{\infty} n^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{ai n \log n} e^{ni\theta} \qquad (a > 0,\ \alpha > 0)$$

[30]) Bernstein 2.

[31]) We have corrected an obscurity pointed out to us by Professor O. Szász, who has proved Theorem 8 independently.

belongs to Lip α, and *a fortiori* to Lip (α, p) for all p. In this case $\sum |c_m|^\varkappa$ is convergent if

$$\varkappa > \frac{2}{1+2\alpha}$$

and otherwise divergent, and the result of Theorem 8 fails if

$$\frac{2}{1+2\alpha} > \frac{p}{p+p\alpha-1},$$

i. e. if $p > 2$.

The same example settles a question suggested to us by Professor M. Riesz. It is known that, in Bernstein's theorem, the number $\frac{1}{2}$ cannot be replaced by any smaller number, but it has apparently not been proved that the theorem is false when $\alpha = \frac{1}{2}$. The function (7.22), with $\alpha = \frac{1}{2}$, plainly gives the requisite *Gegenbeispiel*[32]).

We add in conclusion that the class Lip (α, p) is identical with *the class of functions $f(\theta)$ approximable in mean p-th power, with error $O(n^{-\alpha})$, by trigonometrical polynomials $\varphi_n(\theta)$ of degree n: i. e.* approximable so that

$$\left(\int |f-\varphi_n|^p \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = O(n^{-\alpha}).$$

This approximation may be made, in general, by the Fourier polynomials of $f(\theta)$; the case $p = \infty$, in which this is not true[33]), is exceptional.

Memoirs and books referred to.

1. Andersen, A. F.: Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode, Copenhagen 1921.
2. Bernstein, S.: Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, Comptes Rendus, 8 June 1914.
3. Hardy, G. H. and Littlewood, J. E.: Solution of the Cesàro summability problem for power series and Fourier series, Math. Zeitschrift, **19** (1923), p. 67—96.
4. — On the strong summability of Fourier series, Proc. London Math. Soc. (2), **26** (1927), p. 273—286.
5. — On Parseval's Theorem, ibidem, p. 287—294.
6. — On Young's convergence criterion for Fourier series, Proc. London Math. Soc. (2), in course of publication.

[32]) It fails to show that *the series is not necessarily absolutely convergent when $f(\theta)$ is the integral of order $\frac{1}{2}$ of a bounded function* (in which case it necessarily belongs to Lip $\frac{1}{2}$), or, in other words, that *there are bounded functions for which*

$$\sum n^{-\frac{1}{2}}(|a_n|+|b_n|)$$

is divergent.

Mr. A. E. Ingham has however proved this by the example of the (continuous) function

$$\sum n^{-\frac{1}{2}} (\log n)^{-\frac{1}{2}-\delta} e^{ai n (\log n)^{\frac{1}{2}}} e^{ni\theta}.$$

[33]) See de la Vallée-Poussin, **15**, and Lebesgue, **11**.

7. — Some properties of fractional integrals, I, Math. Zeitschrift, **27** (1928), 565–606.
8. Hobson, E. W.: The theory of functions of a real variable **2**, (ed. 2), Cambridge (1926).
9. Kogbetliantz, E.: Les séries trigonométriques et les séries sphériques, Annales sc. de l'Ecole Normale (3), **40** (1923), p. 259—323.
10. Lebesgue, H.: Recherches sur la convergence des séries de Fourier, Math. Annalen, **61** (1903), p. 251—280.
11. — Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, Bull. Soc. Math. de France, **38** (1913), p. 184—210.
12. Littlewood, J. E.: On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc. (2), **23** (1925), p. 481—519.
13. — On the mean values of power series, Proc. London Math. Soc. (2), **25** (1927), p. 328—337.
14. Pollard, S.: On the criteria for the convergence of a Fourier series, Journal London Math. Soc., **2** (1927), p. 255–262.
15. de la Vallée-Poussin, Ch. J.: Cours d'analyse infinitésimale, **2** (ed. 2), Louvain (1912).
16. — Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris (1919).
17. Priwaloff, J.: Sur les fonctions conjuguées, Bull. Soc. Math. de France, **44** (1916), p. 100—103.
18. Riesz, F.: Über Potenzreihen mit vorgeschriebenen Anfangsgliedern, Acta Math., **42** (1920), p. 145—171.
19. Riesz, F. and Riesz, M.: Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Quatrième congrès des math. scandinaves (1916), p. 27—44.
20. Riesz, M.: Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschrift, **27** (1927), p. 218—244.
21. — Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires, Acta Math., **49** (1927), p. 465—497.
22. Szász, O.: Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen, Münchener Sitzungsberichte (1922), p. 135—150.
23. Szegö, G.: Zur Summation der Fourierschen Reihe, Acta Univ. Hungarieae, **3** (1927), p. 17—24.
24. Titchmarsh, E. C.: A note on Fourier transforms, Journal London Math. Soc., **2** (1927), p. 148—150.
25. Zygmund, A.: Sur la sommabilité des séries de Fourier des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz, Bulletin de l'Acad. de Cracovie (1925), p. 1—9.

(Eingegangen am 1. Oktober 1927.)

Über eine Eigenschaft der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

In einer vor zehn Jahren erschienenen Arbeit[1]) habe ich gezeigt, daß jede Gleichgewichtsfigur rotierender, homogener, gravitierender Flüssigkeit eine auf der Rotationsachse senkrecht stehende Symmetrieebene hat. Einige Zeit später habe ich einen analogen Satz für gewissen Voraussetzungen genügende Gleichgewichtsfiguren einer nichthomogenen gravitierenden Flüssigkeit angegeben[2]). Der a. a. O. gegebene Beweis enthält, wie ich einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Wavre entnehme, eine Lücke[3]). Sie läßt sich, wie in den folgenden Zeilen gezeigt werden soll, durch eine sinngemäße Übertragung der in der ersten Arbeit benutzten Überlegung in der einfachsten Weise schließen.

Betrachten wir eine ein oder mehrere beschränkte Gebiete erfüllende Masse T einer nicht notwendig homogenen gravitierenden Flüssigkeit. Die einzelnen Gebiete können Punkte des Randes miteinander gemeinsam haben.

Die Berandung eines jeden Gebietes wird von einem einzigen Kontinuum gebildet. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß jedes Randkontinuum aus einer endlichen Anzahl Stücke einer Fläche mit stetiger

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften 48 (1918), S. 1120—1135.

[2]) Vgl. L. Lichtenstein, Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung, Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper, Leipzig 1923, S. 69—71.

[3]) Die an der bezeichneten Stelle durchgeführten Überlegungen erschöpfen nicht alle sich bietenden Möglichkeiten. Schon nach der Fertigstellung dieser Note erhielt ich von Herrn Plancherel einen Brief mit einem vollständigen Beweise des fraglichen Satzes, der von dem Beweise des Textes nicht wesentlich verschieden ist.

Normale besteht, wobei auch isolierte konische Punkte zugelassen werden. Wir machen nun die folgenden weiteren Annahmen. Die Dichte der Flüssigkeit, f, ist eine stetige, allenfalls abteilungsweise stetige Funktion des Ortes. Im letzteren Falle läßt sich T in eine endliche Anzahl ganz wie T selbst begrenzter Gebiete zerfällen, so daß in jedem einzelnen dieser Gebiete, der Rand inbegriffen, die Dichte durchaus stetig ist. Es sei $f_* = \text{Min } f$, $f^* = \text{Max } f$, f ein Wert in $\langle f_*, f^*)$, so daß also $f_* \leqq f < f^*$ gilt, und es möge $\mathfrak{M}_f$ die Menge der Punkte in T bezeichnen mit der Dichte $\geqq f$. Offenbar ist $\mathfrak{M}_{f_*} = T$. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{M}_f$ allemal aus einem oder mehreren Gebieten T_f besteht und wie T beschaffen ist. Jedes Teilgebiet von $\mathfrak{M}_f$ ist also von nur einem Kontinuum begrenzt, dieses Randkontinuum ist aus einer endlichen Anzahl Stücke der Flächen mit stetiger Normale gebildet, wobei auch isolierte konische Punkte vorkommen könnten.

Ist $f_1 > f$, so ist die Menge $\mathfrak{M}_{f_1}$, wenn sie nicht mit $\mathfrak{M}_f$ identisch ist, gewiß in $\mathfrak{M}_f$ enthalten. Ist $\mathfrak{M}_{f_1} = \mathfrak{M}_f$, so sind die Werte der Dichte in dem offenen Intervall (f, f_1) in T gewiß nicht vertreten, die Dichte ist abteilungsweise stetig. In einer endlichen Anzahl von Gebieten in T (Homogenitätsgebieten) kann die Dichte einen konstanten Wert haben. Ist f_1 einer dieser Werte, so ist $\mathfrak{M}_{f_1} > \lim_{f_2 \to f_1} \mathfrak{M}_{f_2}$ $(f_2 > f_1)$. Die Menge $\mathfrak{M}_{f^*}$ kann ein oder mehrere Homogenitätsgebiete bilden oder sich auf einzelne Punkte oder Linienstücke reduzieren, sie kann übrigens auch Bestandteile beiderlei Art haben.

Wir nehmen schließlich an, daß die Flüssigkeitsmasse T in gleichförmiger Rotation um die z-Achse eines kartesischen Achsenkreuzes begriffen ist und sich in bezug auf ein mitrotierendes Achsensystem ohne Einwirkung äußerer Kräfte im relativen Gleichgewicht befindet. Der Außendruck wird gleich Null vorausgesetzt. Zu zeigen ist, daß T *notwendigerweise eine auf der Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene hat.*

Es sei S_f die Gesamtbegrenzung von T_f und es möge Σ_f den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller zur Rotationsachse parallelen Sehnen von S_f $(f \leqq f^*)$ bezeichnen. Trifft eine Parallele zur z-Achse S_f in einem einzigen Punkte, so gehört dieser ebenfalls zu Σ_f. Ist Σ_f nicht ein einziges ebenes Flächenstück, so gibt es mindestens einen Punkt $Q_f(x_f, y_f, z_f)$ in T_f oder auf S_f, der so beschaffen ist, daß z_f die obere Grenze aller z-Werte auf Σ_f darstellt, und es Punkte in Σ_f gibt, deren z-Koordinate kleiner als z_f ist. Es sei z_0 die obere Grenze aller z_f. Es gibt mindestens einen Punkt $Q_0(x_0, y_0, z_0)$ in T oder auf dem Rande S von T, der eine Häufungsstelle der Q_f ist.

Es sei $\varkappa V$ das Gravitationspotential,

$$\varkappa V = \varkappa \int_T \frac{f' d\tau'}{D}, \tag{1}$$

ω die Winkelgeschwindigkeit. Auf einer jeden Fläche konstanter Dichte hat das Gesamtpotential

$$U(x, y, z) = \varkappa V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{2}$$

einen konstanten Wert. Die Gleichung von Σ_f ist demnach

$$U(x, y, z) = \text{konst.} \tag{3}$$

Nach bekannten Sätzen hat $V(x, y, z)$, also auch $U(x, y, z)$ in T und auf S stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

Es möge $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots$ irgendeine gegen (x_0, y_0, z_0) konvergierende Folge von Punkten bezeichnen, von denen jeder einzelne Mittelpunkt einer bestimmten Sehne einer Randkomponente S_f ist. Die Endpunkte der zu (x_n, y_n, z_n) gehörigen Sehne mögen $(x_n, y_n, z_n^{(1)})$ und $(x_n, y_n, z_n^{(2)})$ $(z_n^{(2)} \geqq z_n^{(1)})$ heißen. Die Dichte in $(x_n, y_n, z_n^{(1)})$ und $(x_n, y_n, z_n^{(2)})$ sei f_n. Indem wir von der Folge (x_n, y_n, z_n) zu einer geeigneten Teilfolge $(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k})$ übergehen, können wir erreichen, daß $(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k}^{(1)})$ und $(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k}^{(2)})$ für $k \to \infty$ gegen $(x_0, y_0, z_0^{(1)})$ und $(x_0, y_0, z_0^{(2)})$ konvergieren. Zur Vereinfachung möge die neue Folge wieder mit (x_n, y_n, z_n) bezeichnet werden. Jetzt ist also

$$\lim_{n\to\infty} z_n^{(1)} = z_0^{(1)}, \quad \lim_{n\to\infty} z_n^{(2)} = z_0^{(2)}, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z_0. \tag{4}$$

Ist $z_0^{(1)} = z_0$, so ist offenbar auch $z_0^{(2)} = z_0$. Andernfalls ist

$$z_0^{(1)} z_0 = z_0 z_0^{(2)} > 0 \tag{5}$$

und die Dichte hat in $z_0^{(1)}$ und $z_0^{(2)}$ den gleichen Wert, sagen wir f_0; z_0 ist selbst der Mittelpunkt einer Sehne von Σ_{f_0}. Dieser Fall liegt gewiß vor, wenn (x_0, y_0, z_0) in das Innere eines Homogenitätsgebietes fällt. Augenscheinlich trifft die Parallele zur z-Achse durch Q_0 die Fläche Σ_{f_0} möglicherweise auch noch in Punkten, deren z-Koordinate $< z_0^{(1)}$ ist, keinesfalls aber auch noch in einem Punkte, dessen Abstand von der x-y-Ebene $> z_0^{(2)}$ wäre. Der zuerst erwähnte Fall $z_0^{(1)} = z_0^{(2)} = z_0$ kann gewiß nicht eintreten, wenn $f_0 < f^*$ ist, die Schwerkraft in Q_0 nicht verschwindet und die Parallele zur z-Achse Σ_{f_0} nicht berührt. Ist nämlich in Q_0

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 > 0,$$

so haben die Niveauflächen $U = \text{konst.}$ in einer gewissen Umgebung von Q_0 sicher eine stetige Normale. Schließt die Normale in Q_0 mit der z-Achse einen von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel ein, so kann, wie man sich leicht über-

zeugt, $z_n^{(2)} - z_n^{(1)}$ nicht für $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren. In der Tat ändert sich dann die Dichte in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0, z_0) in der Richtung der z-Achse monoton, so daß sich für $z_n^{(2)} - z_n^{(1)}$ eine positive untere Schranke angeben läßt. Ist also die Schwerkraft in Q_0 von Null verschieden, so muß $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$ sein. Ist aber in (x_0, y_0, z_0) die Schwerkraft gleich Null, so gilt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0 . \tag{7}$$

In beiden Fällen ist demnach $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$, mithin auch $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$.

Die vorstehenden Überlegungen gelten auch in dem Grenzfalle $f_0 = f^*$, wenn $\mathfrak{M}_{f^*}$ Gebiete enthält und (x_0, y_0, z_0) auf dem Rande von $\mathfrak{M}_{f^*}$ liegt. Fällt aber (x_0, y_0, z_0) in einen isolierten Punkt oder ein isoliertes Linienstück von $\mathfrak{M}_{f^*}$ hinein, so wird (7) gewiß in (x_0, y_0, z_0) erfüllt sein, sonst würde die Gleichung $U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0)$ ein Flächenstück $\mathfrak{S}$ definieren, das in (x_0, y_0, z_0) und in einer Umgebung dieses Punktes stetige Normale hätte. Aus Gründen der Stetigkeit müßte die Dichte auf $\mathfrak{S}$ den Wert f^* haben; (x_0, y_0, z_0) würde, entgegen der Voraussetzung, nicht in einem isolierten Punkt oder Linienstück von $\mathfrak{M}_{f^*}$ liegen.

Entweder ist also (x_0, y_0, z_0) Mittelpunkt einer Sehne von Σ_{f_0}, oder es ist in (x_0, y_0, z_0) gewiß

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 . \tag{8}$$

Beide Annahmen führen, wie sogleich gezeigt werden wird, zu einem Widerspruch.

Betrachten wir zunächst die durch (8) charakterisierte Möglichkeit etwas näher.

Wie man ohne Schwierigkeiten sieht, ist

$$V(x_0, y_0, z_0) = f_* \int_T \frac{d\tau'}{D_0} + \int_{f_*}^{f^*} df \int_{T_f} \frac{d\tau'}{D_0} , \tag{9}$$

$$D_0^2 = (x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (z_0 - z')^2 ,$$

mithin

$$\frac{\partial}{\partial z_0} V(x_0, y_0, z) = f_* \int_T \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{D_0}\right) d\tau' + \int_{f_*}^{f^*} df \int_{T_f} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{D_0}\right) d\tau' . \tag{10}$$

Es sei $\mathfrak{T}_f$ die Projektion von S_f auf die Ebene $z = 0$. Dann ist

$$\int_{T_f} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{D_0}\right) d\tau' = \int_{\mathfrak{T}_f} dx' dy' \int \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{D_0}\right) dz' , \tag{11}$$

die Integration nach z' über alle Intervalle $z_1' \leqq z' \leqq z_2'$, die die Gerade $x = x'$, $y = y'$ mit T_f gemeinsam hat, erstreckt gedacht. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{D_0}\right) = -\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{D_0}\right) \tag{12}$$

folgt weiter

$$\begin{gathered}\int_{T_f} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{D_0}\right) d\tau' = -\int_{\mathfrak{T}_f} dx'dy' \sum\left(\frac{1}{D(z_0, z_2')} - \frac{1}{D(z_0, z_1')}\right), \\ D^2(z_0, z_1') = (x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z_1' - z_0)^2, \\ D^2(z_0, z_2') = (x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z_2' - z_0)^2.\end{gathered} \tag{13}$$

Ebenso findet man

$$\int_T \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{D(z_0, z')}\right) d\tau' = -\int_{\mathfrak{T}} dx'dy' \sum\left(\frac{1}{D(z_0, z_2')} - \frac{1}{D(z_0, z_1')}\right),$$

wo diesmal $\mathfrak{T}$ die Projektion von S auf die Ebene $z = 0$ und z_1', z_2' die Treffpunkte der Geraden $x = x'$, $y = y'$ mit S bezeichnen. Man sieht jetzt fast unmittelbar, wenn man $z_0 \geqq \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ beachtet und berücksichtigt, daß das Zeichen $>$ wirklich vorkommen soll, daß

$$\frac{\partial}{\partial z_0} V(x_0, y_0, z_0) < 0 \tag{14}$$

ist, was tatsächlich einen Widerspruch bedeutet.

Nun aber der andere als möglich erkannte Fall, derjenige nämlich, daß

$$z_0 = \frac{1}{2}(z_0^{(1)} + z_0^{(2)}) \quad \text{mit} \quad z_0^{(2)} > z_0^{(1)} \tag{15}$$

ist und in $(x_0, y_0, z_0^{(1)})$ und $(x_0, y_0, z_0^{(2)})$ die Dichte, darum auch das Potential den gleichen Wert hat,

$$U(x_0, y_0, z_0^{(1)}) = U(x_0, y_0, z_0^{(2)}),$$

mithin auch

$$V(x_0, y_0, z_0^{(1)}) = V(x_0, y_0, z_0^{(2)}). \tag{16}$$

Jetzt ist in naheliegender Schreibweise

$$V(x_0, y_0, z_0^{(2)}) = f_* \int_{\mathfrak{T}} dx'dy' \int \frac{1}{D(z_0^{(2)}, z')} dz' + \int_{f_*}^{f^*} df \int_{\mathfrak{T}_f} dx'dy' \int \frac{1}{D(z_0^{(2)}, z')} dz',$$

$$V(x_0, y_0, z_0^{(1)}) = f_* \int_{\mathfrak{T}} dx'dy' \int \frac{1}{D(z_0^{(1)}, z')} dz' + \int_{f_*}^{f^*} df \int_{\mathfrak{T}_f} dx'dy' \int \frac{1}{D(z_0^{(1)}, z')} dz',$$

$$\begin{gathered}D^2(z_0^{(2)}, z') = (x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (z_0^{(2)} - z')^2, \\ D^2(z_0^{(1)}, z') = (x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (z_0^{(1)} - z')^2.\end{gathered}$$

Die Integration über dz' ist über alle Intervalle $z_1' \leqq z' \leqq z_2'$, die die Gerade $x = x'$, $y = y'$ mit T_f gemeinsam hat, erstreckt zu denken. Wie man sich leicht überzeugt, ist indessen wegen

$$z_0 = \frac{1}{2}(z_0^{(1)} + z_0^{(2)}), \qquad z_0 \geqq \frac{1}{2}(z_1' + z_2') \tag{18}$$

gewiß

$$\int \frac{1}{D(z_0^{(2)}, z')}\, dz' \leqq \int \frac{1}{D(z_0^{(1)}, z')}\, dz'. \tag{19}$$

Das Gleichheitszeichen gilt hierbei nur, wenn auch in (18) das Gleichheitszeichen zu Recht besteht. Da es nun nach Voraussetzung sicher Punktepaare (x', y', z_1'), (x', y', z_2') gibt, so daß $z_0 > \frac{1}{2}(z_1' + z_2')$ ist, so folgt aus (19) gewiß

$$V(x_0, y_0, z_0^{(2)}) < V(x_0, y_0, z_0^{(1)}),$$

was (16) widerspricht.

Damit ist unser Beweis zu Ende. *Es gibt eine auf der Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene.* Durch die vorstehenden Überlegungen ist des weiteren gezeigt, daß Σ_f mit keiner Parallelen zu der z-Achse mehr als zwei Punkte gemeinsam haben, insbesondere auch nicht streckenweise zusammenfallen kann. Im letzteren Falle wäre beispielsweise in gewissen „oberhalb“ der Symmetrieebene gelegenen Punkten $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$. Singuläre Punkte (Kanten, Ecken, konische Punkte), in denen eben die Schwerkraft verschwinden muß, könnten nur auf der Symmetrieebene (in T oder auf S) vorkommen.

Leipzig, den 10. März 1928.

(Eingegangen am 10. März 1928.)

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Handbuch der Physik

herausgegeben von

H. Geiger-Kiel und **Karl Scheel**-Berlin

Die zuletzt erschienenen Bände:

Band III: **Mathematische Hilfsmittel in der Physik.** Redigiert von **H. Thirring.** Mit 138 Abbildungen. XIV, 647 Seiten. 1928. RM 57.—; gebunden RM 59.50

Band V: **Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper.** Redigiert von **R. Grammel.** Mit 256 Abbildungen. XIV, 623 Seiten. 1927. RM 51.60; gebunden RM 54.—

Band VIII: **Akustik.** Redigiert von **F. Trendelenburg.** Mit 252 Abbildungen. X, 712 Seiten. 1927. RM 58.50; gebunden RM 60.90

Band XII: **Theorien der Elektrizität, Elektrostatik.** Redigiert von **W. Westphal.** Mit 112 Abbildungen. VII, 564 Seiten. 1927. RM 46.50; gebunden RM 49.—

Band XIII: **Elektrizitätsbewegung in festen und flüssigen Körpern.** Redigiert von **W. Westphal.** Mit 222 Abbildungen. VII, 672 Seiten. 1928. RM 55.50; gebunden RM 58.—

Band XVI: **Apparate und Meßmethoden für Elektrizität und Magnetismus.** Redigiert von **W. Westphal.** Mit 623 Abbildungen. IX, 801 Seiten. 1927. RM 66.—; gebunden RM 68.40

Band XVIII: **Geometrische Optik. Optische Konstante. Optische Instrumente.** Redigiert von **H. Konen.** Mit 688 Abbildungen. XX, 865 Seiten. 1927. RM 72.—; gebunden RM 74.40

Band XIX: **Herstellung und Messung des Lichts.** Redigiert von **H. Konen.** Mit 501 Abbildungen. XVIII, 995 Seiten. 1928. RM 86.—; gebunden RM 88.60

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik veröffentlichen wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Guthjahr, W., Mathematik, einschließlich Rechnen. Völlig neu bearbeitet. Gr.-8°. Lieferung 1—10, S. 1—296. Bonness & Hachfeld, Potsdam und Leipzig, 1927. (Selbstunterrichtsbriefe, Methode Rustin. Herausgegeben von dem Rustinschen Institut. Redigiert von C. Ilzig.)

Bornstein, B., La logique géometrique et sa portée philosophique. Gr.-8°. 30 S. Varsaviae. Cura et sumptibus universitatis liberae polonae. 1928. (Bibl. Univ. Lib. Pol. A. 1928. Fasc. 20.)

Haussner, R., Analytische Geometrie der Ebene. Kl.-8°. 164 S. W. de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig, 1928. (Sammlung Göschen Nr. 65.)

Lindemann, F., Untersuchungen über den Fermatschen Satz. Gr.-8°. 32 S. Selbstverlag (Hochschulbuchhandlung von Max Hueber, München, Amalienstr. 79), München, 1928. Preis 2.50 Mark.

L'Enseignement Mathématique. Redigée par H. Fehr et A. Buhl. XXVI^{e} année. N^{os} 4—5—6. Gr.-8°. S. 193—368. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, Georg et C^{ie}, Genève, 1927.

Giebel, K., Das Pendel. Gr.-8°. IV, 191 S. Zentralverband der Deutschen Uhrmacher E. V. in Halle (Saale), 1928.

Salkowski, E., Grundzüge der darstellenden Geometrie. Gr.-8°. VIII, 100 S. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig, 1928. (Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern. Herausgegeben von E. Hilb, Band 3.)

Burnside, W., Theory of probability. Gr.-8°. XXX, 106 S. University Press, Cambridge, 1928.

Thomson, J. J., Beyond the electron. A lecture given at Girton College on 3 March 1928. Gr.-8°, 43 S. University Press, Cambridge, 1928.

Hierzu als Beilage der Katalog „Mathematik, Physik, Chemie" aus den Verlagen Julius Springer in Berlin und Wien, J. F. Bergmann in München.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.